QM II Klausur am 31.01.2018

Aufgabe

Der Autoändler A bietet bei 0,9 % Jahreszins für einen Ratenkauf eines VW T6 das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung in Höhe von 4 000 Euro, fällig sofort
- vorschüssige Monatsraten in Höhe von 562 Euro über vier Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
- Restzahlung (Schlussrate) nach vier Jahren in Höhe von 34 707,90 Euro

a) Wie hoch dürfte bei einem Barkauf der Verkaufspreis höchstens sein, damit der Barkauf günstiger wäre als das Finanzierungsmodell?

b) Der Autohändler B bietet für den gleichen Wagen ebenfalls bei 0,9 % Jahreszins das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung über 5 000 Euro
- Quartalsraten über fünf Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
- Restzahlung (Schlussrate) in Höhe von 35 000 Euro nach fünf Jahren.

Wie hoch müssen die Quartalsraten bemessen sein, damit die Finanzierungsmodelle der beiden Händler gleichwertig sind, d.h. die selben Barwerte haben? *Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass sich der Barwert des Angebots von Händler A auf 63 994,43 Euro beläuft.*

Lösung zu Aufgabe

a) $r_J = 562(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}009) = 6\,776{,}877$

$$R_0 = 6\,776{,}877 \cdot \frac{1{,}009^4 - 1}{0{,}009} \cdot \frac{1}{1{,}009^4} = 26\,508{,}40$$

$$K_0 = 4\,000 + 26\,508{,}40 + \frac{34\,707{,}90}{1{,}009^4} = 63\,994{,}43$$

d.h. der Verkaufspreis dürfte höchstens 63 994,42 Euro betragen, damit der Barkauf günstiger wäre als das Finanzierungsmodell.

b) $$R_0 = 63\,994{,}43 - 5\,000 - \frac{35\,000}{1{,}009^5} = 25\,527{,}78$$

$$25\,527{,}78 = r_J \cdot \frac{1{,}009^5 - 1}{0{,}009} \cdot \frac{1}{1{,}009^5} \Leftrightarrow r_J = 5\,244{,}23$$

$$5\,244{,}23 = r'_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}009) \Leftrightarrow r'_Q = 1\,303{,}724$$

d.h. die Quartalsraten müssen 1 303,72 Euro betragen.

Finanzmathematik-Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

Zu Beginn der Jahre 2019, 2022 und 2026 möchte eine Familie jeweils 10 000 Euro ihren Kindern als Ausbildungsbeihilfe zur Verfügung stellen. Für dieses Vorhaben werden ab 01.01.2013 bis 31.12.2025 vorschüssige (gleich hohe) Monatsbeträge auf ein Konto eingezahlt. Die drei Ausbildungsbeihilfen der Jahre 2019, 2022, 2026 werden von diesem Konto abgehoben. Der Zins beträgt 5% (p.a.).

a) Wie hoch müssen die vorschüssigen Monatsbeträge sein?

b) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2018.

c) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2021.

Aufgabe 2

a) Ein Bauherr erhält von der Kreditanstalt für Wiederaufbau einen Baukredit zu folgenden Konditionen angeboten:

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	6,15 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 1,32 %
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

1. Stellen Sie den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste bis vierte Jahr auf.
2. Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Wie hoch ist der ein Jahr nach der letzten vollen Annuität zu zahlende Restbetrag?

b) Auf Grund einer Veränderung am Kapitalmarkt zwischen Beantragung und Auszahlung des Kredits fällt der jährliche Zinssatz. Wie verändern sich die Annuität und der anfängliche Tilgungssatz, wenn von folgenden Konditionen ausgegangen wird?

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	5,95 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Laufzeit:	30 Jahre (inklusive des tilgungsfreien Jahres)
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Wert der Abhebungen am 01.01.2013:
$$\frac{10\,000}{1{,}05^6} + \frac{10\,000}{1{,}05^9} + \frac{10\,000}{1{,}05^{13}} = 19\,211{,}46$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$19\,211{,}46 = r_J \cdot \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^{13}} \Rightarrow r_J = 2\,045{,}17$$

Vorschüssige monatliche Rente r_M:
$2\,045{,}17 = r_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) \Rightarrow r_M = 165{,}94$
d.h. die vorschüssigen Monatsrente beträgt 165,95 Euro.

b) $2\,045{,}17 \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 13\,911{,}07$
d.h. der Kontostand am 31.12.2018 beträgt 13 911,07 Euro.

c) $3\,911{,}07 \cdot 1{,}05^3 + 2\,045{,}17 \cdot \dfrac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 10\,974{,}95$
d.h. der Kontostand am 31.12.2021 beträgt 10 974,95 Euro.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) 1. $A = (0{,}0615 + 0{,}0132)120\,000 = 7\,380 + 1\,584 = 8\,964$

Jahr	Schuld (JA)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schuld (JE)
1	120 000	7 380	–	7 380	120 000
2	120 000	7 380	1 584	8 964	118 416
3	118 416	7 282,58	1 681,42	8 964	116 734,58
4	116 734,58	7 179,18	1 784,82	8 964	114 949,76

2. $a_n = \dfrac{120\,000}{8\,964}$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - a_n \cdot 0{,}0615\right]}{\ln 1{,}0615} = 29{,}04$$
d.h. 29 volle Annuitäten
$$K_{29} = 120\,000 \cdot 1{,}0615^{29} - 8\,964 \cdot \frac{1{,}0615^{29} - 1}{0{,}0615} = 357{,}57$$
$357{,}57 \cdot 1{,}0615 = 379{,}56$
d.h. die Restzahlung beträgt 379,56 GE

b) $A = 120\,000 \cdot 1{,}0595^{29} \cdot \dfrac{0{,}0595}{1{,}0595^{29} - 1} = 8\,783{,}36$
d.h. die Annuität beträgt 8 783,36
$8\,783{,}36 = 120\,000(0{,}0595 + t) \Rightarrow t = 0{,}0137$
d.h. die anfängliche Tilgung beträgt 1,37 %

QM II Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

Frau A. hat am 01.01.2017 einen Kredit von 20 000 € aufgenommen. Die Jahreszinsen betragen 2,1%.

a) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden erstmals den Betrag von 22 600 €

   1. bei linearer Verzinsung?
   2. bei nachschüssiger Verzinsung?

b) Frau A. möchte die Schulden zurückzahlen durch vorschüssige Quartalsraten in den Jahren 2017, 2018, 2019 und 2020. Wie hoch sind diese Quartalsraten?

c) Frau A. möchte die Schulden zurückzahlen durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von 350 €, erste Monatrsate fällig am 31.01.2017.

   1. Wie viele volle Monatsraten sind zu zahlen?
   2. Wie hoch ist die Restschuld unmittelbar nach Zahlung der letzten vollen Monatsrate?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) 1. $22\,600 = 20\,000(1 + n \cdot 0{,}021) \Leftrightarrow 1{,}13 = 1 + n \cdot 0{,}021 \Leftrightarrow 0{,}13 = n \cdot 0{,}021 \Leftrightarrow n = 6{,}190476$
   d.h. bei linearer Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sieben Jahren.

   2. $n = \dfrac{\ln \frac{22\,600}{20\,000}}{\ln 1{,}021} = 5{,}880784$
   d.h. bei nachschüssiger Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sechs Jahren.

b) $20\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}021^4 - 1}{0{,}021} \cdot \dfrac{1}{1{,}021^4} = r_J \cdot 3{,}798506 \Leftrightarrow r_J = 5\,265{,}227$
   $5\,265{,}227 = r'_U \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}021) = r'_U \cdot 4{,}0525 \Leftrightarrow r'_U = 1\,299{,}254$
   d.h. die Quartalsraten betragen 1 299,25 €.

c) $r_J = 350 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}021) = 4\,240{,}425$

   1. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{20\,000}{4\,240{,}425} \cdot 0{,}021\right]}{\ln 1{,}021} = 5{,}018724$
   d.h. es sind $5 \cdot 12 = 60$ volle Monatsraten zu zahlen. (Die letzte volle Monatsrate ist fällig am 31.12.2021.)

   2. $K_5 = 20\,000 \cdot 1{,}021^5 - 4\,240{,}425 \cdot \dfrac{1{,}021^5 - 1}{0{,}021} = 78{,}56003$
   d.h. die Restschuld beträgt 78,56 €.

F-Mathe-Klausur am 19.07.2017

Aufgabe 1

Jemand zahlt bei 4% Zinsen p.a. im Zeitraum vom 01.01.2010 bis 31.12.2015 jeweils zu Beginn eines Monats 200 € und im Zeitraum vom 01.01.2016 bis 31.12.2018 jeweils zu Beginn eines Quartals 750 € auf ein Konto ein.

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2015?

b) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2018?

c) Wie oft kann er anschließend eine regelmäßige jährliche vorschüssige Rente über 2 000 € beziehen, deren erster Betrag fällig ist am 01.01.2021?

Aufgabe 2

Ein Unternehmen hat gegenüber einem Kunden die folgenden drei Forderungen:

Fälligkeitstermin	Betrag
31.03.2016	35 000 GE
30.09.2017	50 000 GE
31.12.2019	25 000 GE

a) Die Wirtschaftsprüfung schlägt vor, die drei Forderungen mit dem Barwert in der Bilanz auszuweisen. Mit welchem Betrag geht dann die Summe der drei Forderungen in die Bilanz zum 31.12.2014 ein? Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

b) Am 30.06.2014 wird eine Änderung der Zahlungsmodalitäten vereinbart. Dem Schuldner soll mehr Zeit zur Rückzahlung gegeben werden. Die Rückzahlung erfolgt nun in zwei Beträgen zum 31.12.2018 und zum 31.12.2020. Dabei soll die zweite Zahlung dreimal so hoch sein wie die erste Zahlung. Bestimmen Sie beide Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 30.06.2014 ist. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $r_J = 200(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 2\,452$

$R_6 = 2\,452 \cdot \dfrac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} = 16\,264{,}06$

d.h. der Kontostand am 31.12.2015 beträgt 16 264,06 €.

b) $16\,264{,}06 \cdot 1{,}04^3 = 18\,294{,}85$

$r_J = 750(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 3\,075$

$R_3 = 3075 \cdot \dfrac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} = 9598{,}92$

$K_9 = 18\,294{,}85 + 9598{,}92 = 27\,893{,}77$

d.h. das Guthaben am 31.12.2018 beträgt 27 893,77 €.

c) $27\,893{,}77 \cdot 1{,}04^2 = 30\,169{,}90$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,169{,}90}{1{,}04 \cdot 2\,000} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 22{,}13$$

d.h. 22 Jahre lang können die vollen Beträge ausgezahlt werden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wert der Forderungen am 31.12.2014

$$\begin{aligned}
&\frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5} \\
= \;& 33\,523{,}10 + 45\,481{,}64 + 21\,049{,}33 \\
= \;& 100\,054{,}07
\end{aligned}$$

d.h. in die Bilanz zum 31.12.2014 gehen die Forderungen mit einem Betrag von 100 054,07 GE ein.

b) Wert der Forderungen am 30.06.2014

$$\begin{aligned}
&\frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\
= \;& 32\,951{,}45 + 44\,705{,}96 + 20\,687{,}30 \\
= \;& 98\,344{,}71
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
98\,344{,}71 &= \frac{x}{1{,}035^4 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{3x}{1{,}035^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 0{,}7995 \cdot 3x \\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 2{,}3985 \cdot x \\
98\,344{,}71 &= 3{,}254982 \cdot x \\
x &= 30\,213{,}5957 \text{ bzw. } 3x = 90\,640{,}7870
\end{aligned}$$

d.h. die erste Forderung beträgt 30 213,60 GE und die zweite Forderung beträgt 90 640,80 GE.

QM II Klausur am 19.07.2017

Aufgabe 1

Herr Müller hat ein Vermï¿½gen von 100.000 Euro.

a) Das Vermï¿½gen wird mit einem Zinssatz von 6% pro Jahr verzinst.

   1. Herr Müller entnimmt am Anfang eines jeden Quartals 500 Euro. ï¿½ber welchen Betrag verfï¿½gt Herr Müller nach 10 Jahren?
   2. Wie viel dï¿½rfte Herr Müller bei einer jï¿½hrlichen Entnahme zum jeweiligen Jahresanfang entnehmen, so dass er in 10 Jahren weiterhin ï¿½ber ein Vermï¿½gen von 100.000 Euro verfï¿½gt?

c) Wie hoch mï¿½sste der Zinssatz bei stetiger Verzinsung sein, damit aus dem Vermï¿½gen von 100.000 Euro in 10 Jahren ein Vermï¿½gen von 200.000 Euro wird?

b) Herr Müller erwirbt am 01.01.2017 ein Haus zum Preis von 500.000 Euro und nimmt dafür einen Kredit in Höhe von 400.000 Euro auf. Für die Ausgestaltung des Kredits bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Der Kredit hat eine Laufzeit von 20 Jahren und soll in gleichbleibenden jährlichen Tilgungsraten getilgt werden. Der Zinssatz belï¿½uft sich auf 3%.

2. Möglichkeit: Der Kredit hat eine Laufzeit von 15 Jahren. Der Kredit wird mit einer einzigen Zahlung am Ende der Laufzeit getilgt. Der jï¿½hrliche Zinssatz belï¿½uft sich auf 2%.

Welche Tilgungsmöglichkeit sollte Herr Müller wï¿½hlen, wenn er als Entscheidungskriterium den Barwert aller Zinszahlungen heranzieht?

Lösung zu Aufgabe 1

a)
   1. $r_J = 500(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}06) = 2\,075$

      $$K_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}06^{10} - 2\,075 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 151\,734{,}62$$

      d.h. er kann über 151 734,62 Euro verfügen.
   2. Zinsen am Ende des ersten Jahres $= 100\,000 \cdot 0{,}06 = 6\,000$ Euro.

      Ewige vorschüssige Jahresrente $= \dfrac{6\,000}{1{,}06} = 5\,660{,}38$

      d.h. er dürfte jeweils zu Beginn eines Jahres 5 660,38 Euro abheben.

b) $200\,000 = 100\,000 \cdot e^{10 \cdot i} \Leftrightarrow 2 = e^{10 \cdot i} \Leftrightarrow \ln 2 = 10 \cdot i \Leftrightarrow i = \dfrac{\ln 2}{10} = 0{,}06931472$

d.h. der Jahreszinssatz müsste 6,931472% betragen.

c) *1. Möglichkeit:*

Tilgungsbetrag der Ratentilgung $= \frac{400\,000}{20} = 20\,000$

Barwert aller Zinszahlungen einer Ratentilgung:

$$Z_0 = 400\,000 - 20\,000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{20}} = 102\,450{,}50$$

2. Möglichkeit:

Schulden nach 15 Jahren, wenn nichts zurück gezahlt wird:

$K_{15} = 400\,000 \cdot 1{,}02^{15} = 538\,347{,}3$

Summe der Zinszahlungen am Ende des 15. Jahres:

$538\,347{,}3 - 400\,000 = 138\,347{,}3$

Barwert aller Zinszahlungen:

$$\frac{138\,347{,}3}{1{,}02^{15}} = 102\,794{,}1$$

d.h. der Barwert aller Zinszahlungen ist bei der ersten Möglichkeit geringer und somit ist die erste Möglichkeit günstiger.

F-Mathe-Klausur vom 24.01.2017

Aufgabe 1
Ein Auto hat einen Kaufpreis von 14 000 €.

a) Ein Kunde mietet das Auto zu folgenden Konditionen:

- 5 500 € Anzahlung/Sofortzahlung
- vier Jahre lang nachschüssige Monatsraten zu 60 €

1. Wie hoch ist bei einem Jahreszins von 2,5% der Barwert der Zahlungen?
2. Nach vier Jahren möchte der Kunde das vorher gemietete Auto zu seinem Restwert kaufen. Wie hoch muss der Restwert nach vier Jahren bei einem Jahreszins von 2,5% sein, damit der Barwert aller Zahlungen dem ehemaligen Kaufpreis von 14 000 € entspricht?

b) Angenommen das Auto soll binnen sechs Jahren mit vorschüssigen Monatsraten abbezahlt werden. Wie hoch müssen diese Monatsraten bei 2,5 % Jahreszins sein, um dem Kaufpreis von 14 000 € zu entsprechen?

Aufgabe 2
Herr Müller möchte ein Vermï¿½gen aufbauen und legt hierzu ein Sparbuch an. Herr Müller möchte im Jahr 2017 zu Beginn eines jeden Quartals 300 Euro auf das Sparbuch einzahlen. Der Zinssatz des Sparbuchs belï¿½uft sich im Jahr 2017 auf 4% p.a. Von 2018 bis einschließlich 2027 möchte Herr Müller am Ende eines jeden Jahres 1200 Euro auf das Sparbuch einzahlen. Der Zinssatz in diesem Zeitraum liegt bei 6% p.a. Von 2028 bis einschließlich 2037 möchte Herr Müller 1200 Euro zu Beginn eines jeden Jahres einzahlen. Der Zinssatz in diesem Zeitraum liegt bei 7% p.a.

a) Bestimmen Sie den Betrag, ï¿½ber den der Herr Müller am 31.12.2037 verfï¿½gt.

b) Bestimmen Sie den Betrag, den Herr Müller am 31.12.2016 einzahlen mï¿½sste, damit er am 31.12.2037 ï¿½ber das gleiche Vermï¿½gen wie in Teilaufgabe a) verfï¿½gt. Unterstellen Sie bei Ihrer Rechnung einen jï¿½hrlich nachschï¿½ssigen Zinssatz von 6% p.a.

c) Bestimmen Sie den stetigen Zinssatz, zu dem Herr Müller den Betrag aus Teilaufgabe b) anlegen mï¿½sste, damit er am 31.12.2037 ï¿½ber den gleichen Betrag verfï¿½gt wie in Teilaufgabe a).

d) Herr Müller kann sein Vermï¿½gen ab dem 01.01.2038 zu einem Zinssatz von 4% für unbestimmte Zeit anlegen. Herr Müller möchte ab dem 01.01.2038 zum jeweiligen Jahresende eine Rente aus seinem Vermï¿½gen entnehmen. Bestimmen Sie, welchen Betrag Herr Müller maximal entnehmen darf, damit er die Rente unendlich lange entnehmen kann.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $r_J = 60(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}025) = 728{,}25$

1. $K_0 = 5\,500 + 728{,}25 \cdot \dfrac{1{,}025^4 - 1}{0{,}025} \cdot \dfrac{1}{1{,}025^4} = 8\,239{,}658$
   d.h. der Barwert beträgt 8 239,66 €.
2. $14\,000 = 8\,239{,}658 + \dfrac{x}{1{,}025^4} \Leftrightarrow 5\,760{,}342 = \dfrac{x}{q^4} \Leftrightarrow x = 6\,358{,}34$
   d.h. der Restwert nach vier Jahren müsste 6 358,34 € betragen.

b) $14\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}025^6 - 1}{0{,}025} \cdot \dfrac{1}{1{,}025^6} \Leftrightarrow r_J = 14\,000 \cdot 1{,}025^6 \cdot \dfrac{0{,}025}{1{,}025^6 - 1} = 2\,541{,}70$
$2\,541{,}70 = r_u(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}025) \Leftrightarrow r_u = 208{,}9784$
d.h. die Monatsraten müssen 208,98 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Vermï¿½gen am 31.12.2017:
$K_1 = 300 \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 004\right) = 1230$
Vermï¿½gen am 31.12.2017:
$K_{11} = 1200 \cdot \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} + 1230 \cdot 1{,}06^{10} = 15\,816{,}954 + 2\,202{,}743 = 18\,019{,}697 \approx 18\,019{,}70$
Vermï¿½gen am 31.12.2037:
$K_{21} = 1\,200 \cdot 1{,}07 \cdot \dfrac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} + 18\,019{,}70 \cdot 1{,}07^{10} = 17\,740{,}319 + 35\,447{,}477 = 53\,187{,}796 \approx 53\,187{,}80$

b) $K_0 = \dfrac{53\,187{,}80}{1{,}06^{21}} = 15\,645{,}48$

c)
$$\begin{aligned}
15\,645{,}48 \cdot e^{i \cdot 21} &= 53\,187{,}80 && \mid \div 15\,645{,}48 \\
e^{i \cdot 21} &= 3{,}399563 && \mid \ln \\
i \cdot 21 &= \ln 3{,}399563 && \mid \div 21 \\
i &= \frac{\ln 3{,}399563}{21} \\
i &= 0{,}0582689 \approx 0{,}0583
\end{aligned}$$

d) ewige nachschüssige Jahresrente r_J:
$r_J = 53\,187{,}80 \cdot 0{,}04 = 2\,127{,}512$

QM II-Klausur vom 24.01.2017

Aufgabe 1

Für einen Hauskauf wurde am 01.01.2017 ein Kredit über 150 000 € aufgenommen. Für die Kreditrückzahlung werden vorschüssige Monatsraten über 15 Jahre zu 2,2 % Jahreszinsen vereinbart. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2017.

a) Wie hoch sind die vorschüssigen monatlichen Rückzahlungen?

b) Wie hoch sind die Restschuld am 31.12.2026?

c) Am 01.01.2027 erfolgt eine außerplanmäßige Rückzahlung in Höhe von 30 000 €. Anschließend werden weiterhin die unter Teilaufgabe a) berechneten monatlichen Rückzahlungen geleistet.

   1. An welchem Tag erfolgt dann die Zahlung der letzten vollen Monatsrate? (Begründung!)
   2. Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2028?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $150\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}022^{15} - 1}{0{,}022} \cdot \dfrac{1}{1{,}022^{15}} \Leftrightarrow r_J = 11\,849{,}21$
   $11\,849{,}21 = r'_u(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}022) \Leftrightarrow r'_u = 975{,}8058$
   d.h. die Monatsraten betragen 975,81 €.

b) $K_{10} = 150\,000 \cdot 1{,}022^{10} - 11\,849{,}21 \cdot \dfrac{1{,}022^{10} - 1}{0{,}022} = 55\,528{,}01$
   d.h. die Restschuld beträgt 55 528,01 €.

c) $55\,528{,}01 - 30\,000 = 25\,528{,}01$

   1. $n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{25\,528{,}01}{11\,849{,}21} \cdot 0{,}022\right)}{\ln 1{,}022} = 2{,}231326$
      $12 \cdot 2{,}231326 = 26{,}77591$
      d.h. es sind noch 26 volle Monatsraten zu zahlen; d.h. die letzte volle Monatsrate ist zu zahlen am 01.02.2029.
   2. Restschuld am 31.12.2028:
      $K_{12} = 25\,528{,}01 \cdot 1{,}022^2 - 11\,849{,}21 \cdot \dfrac{1{,}022^2 - 1}{0{,}022} = 2\,704{,}495$
      d.h die Restschuld am 31.12.2028 beträgt 2 704,50 €.

QM II -Klausur am 27.09.2016

Aufgabe 1
Für einen Hauskauf werden zwei Kredite

- 100 000 € am 01.01.2017
- 50 000 € am 01.01.2018

aufgenommen. Die beiden Kredite sollen durch eine gemeinsame Annuitätentilgung über 15 Jahre zurückgezahlt werden, erste Annuität ist fällig am 31.12.2018. Der Jahreszins beträgt 2,2 %.

a) Wie hoch sind die Annuitäten?

b) Wie hoch ist die Restschuld am 01.01.2025?

c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das Jahr 2025 an.

d) Am 01.01.2025 können vorzeitig 20 000 € zurückgezahlt werden.

1. An welchem Datum ist die letzte volle Annuität aus Teilaufgabe a) zu zahlen?
2. Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $K_0 = 100\,000 \cdot 1{,}022 + 50\,000 = 152\,200$

$$A = 152\,200 \cdot 1{,}022^{15} \cdot \frac{0{,}022}{1{,}022^{15} - 1} = 12\,022{,}997 \approx 12\,023$$

d.h. die Annuitäten betragen 12 023 €.

b) $$K_7 = 152\,200 \cdot 1{,}022^7 - 12\,023 \cdot \frac{1{,}022^7 - 1}{0{,}022} = 87\,319{,}94$$

d.h. die Restschuld beträgt 87 319,94 €.

c) $Z_8 = K_7 \cdot i$
$T_8 = A - Z_8$
$K_8 = K_7 - T_8$

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuitï¿½t a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
7	1 921,04	10 101,96	12 023,00	77 217,98

d) $K_0 = 87\,319{,}94 - 20\,000 = 67\,319{,}94$

1. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{67\,319{,}94}{12\,023} \cdot 0{,}022\right]}{\ln 1{,}022} = 6{,}040848$
   d.h. es sind noch sechs volle Annuitäten in Höhe von 12 023 € zu zahlen;
   d.h. am 31.12.2030 ist die letzte volle Annuität zu zahlen.

2. $K_6 = 67\,319{,}94 \cdot 1{,}022^6 - 12\,023 \cdot \dfrac{1{,}022^6 - 1}{0{,}022} = 485{,}58$
   $485{,}58 \cdot 1{,}022 = 496{,}26$
   d.h. die Restzahlung beträgt 496,25 €.

QM II-Klausur am 07.07.2016

Aufgabe 1

Einem Immobilienmogul wird in Kï¿½ln ein Hochhaus zum Kauf angeboten. Der Kaufpreis liegt bei 10 Mio. Euro. Es ist davon auszugehen, dass das Hochhaus noch für 25 Jahre genutzt werden kann, bevor es (ohne Kosten) abgerissen werden muss. Der Zinssatz liegt bei 3%.

a) Bestimmen Sie die Höhe der jï¿½hrlich nachschï¿½ssigen Annuitï¿½t, die aus der Vermietung des Hochhauses erwirtschaftet werden muss, damit sich der Kauf des Hochhauses lohnt.

b) Der Immobilieninvestor möchte vor dem Kauf der Immobilie gerne einen Abschreibungsplan für die Immobilie studieren. Die Abschreibung der Immobilie soll gemï¿½ï¿½ der geometrisch-degressiven mit ï¿½bergang zur linearen Abschreibung erfolgen. Der Abschreibungssatz wird auf 10% festgelegt. Gehen Sie von einer Nutzungsdauer von 25 Jahren aus.

1. In welchem Jahr soll die Abschreibung von der geometrisch-degressiven auf die lineare Abschreibung umgestellt werden?
2. Stellen Sie den Abschreibungsplan für die ersten drei Jahre auf.

c) Eine Familie möchte im Zuge des möglichen Eigentï¿½merwechsels des Hochhauses gerne die selbst genutzte Wohnung kaufen. Die Familie zahlt eine Miete von 1.000 Euro am Ersten eines jeden Monats und bietet 300.000 Euro für die derzeit gemietete Wohnung. Ist das Angebot aus Sicht des Verkï¿½ufers lukrativ, so dass sich ein Verkauf der Wohnung finanziell lohnt?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $A = 10\,000\,000 \cdot 1{,}03^{25} \cdot \dfrac{0{,}03}{1{,}03^{25} - 1} = 574\,278{,}71$

b)
1. $x \geq n + 1 - \dfrac{1}{a} = 25 + 1 - \dfrac{1}{0{,}1} = 26 - 10 = 16$
   d.h. im 16. Jahr sollte erstmals linear abgeschrieben werden.
2.

Jahr	A-Betrag	Buchwert
1	1 000 000	9 000 000
2	900 000	8 100 000
3	810 000	7 290 000

c) $R_0 = 1\,000(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}03) \cdot \dfrac{1{,}03^{25} - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^{25}} = 212\,353{,}34$

$R_0 < 300\,000$

d.h. der Immobilienmogul sollte verkaufen.

F-Mathe-Klausur am 07.07.2016

Aufgabe 1

a) Ein Unternehmen zahlt seit jeher für jeden Arbeitnehmer am Jahresende 1.435,95 Euro in die betriebliche Rentenkasse ein. Auf die Betriebsrente wird ein Zins von 4% erwirtschaftet. Herr Meier scheidet im Alter von 65 Jahren am 31.12.2015 aus dem Unternehmen aus. Unterstellen Sie bei Ihren Rechnungen einen einheitlichen Zins von 4%.

1. Ermitteln Sie, wie lange Herr Meier im Unternehmen angestellt war, wenn er eine monatlich nachschï¿½ssige Betriebsrente für 25 Jahre in Höhe von 1.000 Euro erhï¿½lt.
2. Welchen einmaligen Betrag hätte das Unternehmen zum Beschï¿½ftigungsbeginn von Herrn Meier zum Zinssatz von 4% anlegen mï¿½ssen, damit Herr Meier zum 31.12.2015 die genannte Rente in Höhe von 1.000 Euro für 25 Jahre beziehen kann?
   Hinweis: Für den Fall, dass Sie Aufgabe a.1) nicht beantwortet haben, nehmen Sie an, dass Herr Meier 47 Jahre im Unternehmen beschï¿½ftigt war.

b) Herr Meier hat neben der Betriebsrente auch privat für seinen Ruhestand vorgesorgt. Dabei hat ihm insbesondere eine grï¿½ï¿½ere Erbschaft am 31.12.2005 in Höhe von 500.000 Euro geholfen. Bestimmen Sie, auf welchen Betrag die 500.000 Euro bis zum 31.12.2015 angewachsen sind, wenn Herr Meier das Kapital zu einer stetigen Verzinsung mit einem Zinssatz von 2% anlegen konnte.

c) Herr Meier kauft am 31.12.2015 für seinen Ruhestand eine Wohnung zum Preis von 200.000 Euro. Er hat die Wohnung ï¿½ber einen Kredit mit einem Jahreszins von 4% finanziert. Mit der Bank hat Herr Meier eine Annuitï¿½ten-Tilgung vereinbart, bei der er zu jedem Jahresende 14.716,35 Euro an die Bank zahlt. Berechnen Sie, wie lange Herr Meier die volle Annuitï¿½t zahlen muss.

Aufgabe 2

Es bestehen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 30 000 € am 31.07.2016
- 20 000 € am 31.03.2018
- 10 000 € am 31.05.2021

Diese Zahlungsverpflichtungen sollen umgeschuldet werden durch zwei gleich große Rückzahlungen am 31.07.2016 und am 31.12.2020. Wie hoch sind zu einem Jahreszins von 2,1 % diese beiden Zahlungen

a) bei linearer Verzinsung (Bewertungsstichtag 31.07.2016)?

b) bei relativ gemischter Verzinsung (Bewertungsstichtag 31.07.2016)?

c) bei konformer Verzinsung?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) 1. $R_0 = 1\,000(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{25} - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{25}} = 190\,901{,}82$

$$n = \frac{\ln[1 + \frac{190\,901{,}82}{1\,435{,}95} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 46{,}99987 \approx 47 \text{ Jahre}$$

2. $\dfrac{R_0}{1{,}04^{47}} = 30\,216{,}43$

d.h. das Unternehmen hätte 30 216,43 Euro anlegen müssen.

b) $K_{10} = 500\,000 \cdot e^{10 \cdot 0{,}02} = 610\,701{,}38$
d.h das Guthaben wäre auf 610 701,38 Euro angewachsen.

c) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{200\,000}{14\,716{,}35} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 20$
d.h. die volle Annuität ist 20 Jahre lang zu zahlen.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$30\,000 + \dfrac{20\,000}{1 + 1\frac{8}{12} \cdot 0{,}021} + \dfrac{10\,000}{1 + 4\frac{10}{12} \cdot 0{,}021} = 58\,402{,}20$
$58\,402{,}20 = x + \dfrac{x}{1 + 4\frac{5}{12} \cdot 0{,}021} = x + 0{,}9151224x = 1{,}9151224x \Leftrightarrow x = 30\,495{,}28$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 495,28 €.

b) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$30\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}021 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}021)} + \dfrac{10\,000}{1{,}021^4 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}021)} = 58\,362{,}23$
$58\,362{,}23 = x + \dfrac{x}{1{,}021^4 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}021)} = x + 0{,}9122492x = 1.9122492x \Leftrightarrow x = 30\,520{,}20$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 520,20 €.

c) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$30\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}021^{1\frac{8}{12}}} + \dfrac{10\,000}{1{,}021^{4\frac{10}{12}}} = 58\,363{,}42$
$58\,363{,}42 = x + \dfrac{x}{1{,}021^{4\frac{5}{12}}} = x + 0{,}9122971x = 1{,}9122971x \Leftrightarrow x = 30\,520{,}06$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 520,06 €.

F-Mathe Aufgaben vom 02.02.2016

Aufgabe 4
Ein Kapital von 100 000 GE wird am 17. Januar 2016 zu einem Jahreszins von 3,6% angelegt. Auf welchen Betrag wï¿½chst das Kapital bis zum 11. Mai 2018 bei

a) relativ gemischter Verzinsung an?

b) bankmäßig gemischter Verzinsung an?

c) tï¿½glicher Verzinsung zum relativen Zins an?

d) konformer Verzinsung an?

Aufgabe 5
Auf einem Konto werden zu 0,8% Jahreszins folgende Kontobewegungen verbucht:

- Einzahlung von 10 000 GE am 01.01.2017
- Auszahlungen von 100 GE monatlich vorschüssig in den Jahren 2019, 2020, 2021
- Einzahlungen von 500 GE vierteljährlich nachschüssig in den Jahren 2024 und 2025

a) Wie hoch ist der Kontostand am

   1. 31.12.2021?
   2. 31.12.2025?

b) Wie viele volle Jahre lang können anschlieï¿½end ab dem 01.01.2028 jährlich vorschüssig 900 GE entnommen werden?

Aufgabe 6
Ein Unternehmen möchte eine Investition tätigen. Dafür stehen dem Unternehmen verschiedene Alternativen zur Verfügung. Bei allen Alternativen muss am 1. Januar 2016 ein Betrag von 100 000 GE als Investitionssumme gezahlt werden. Verwenden Sie bei den folgenden Fragestellungen einen jährlichen Rechnungszins von 3,8%.

a) Bei Investitionsalternative 1 erhält das Unternehmen als Rückfluss eine jährlich nachschüssige Rente in Höhe von 20 000 GE. Erstmalig geht dieser Betrag am 31. Dezember 2016 bei dem Unternehmen ein.

   1. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente, wenn sie sieben Jahre lang gezahlt wird? Lohnt sich bei einem Zahlungszeitraum von sieben Jahren diese Investition?
   2. Wie hoch muss die Rentenlaufzeit mindestens sein, damit der Barwert der Rente größer ist als die Investitionssumme von 100 000 GE?

b) Bei Investitionsalternative 2 erhält das Unternehmen als Rückfluss eine quartalsweise nachschüssige Rente in Höhe von 4 950 GE. Erstmalig geht dieser Betrag am 31. März 2016 bei dem Unternehmen ein. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente, wenn sie sieben Jahre lang gezahlt wird? Lohnt sich bei einem Zahlungszeitraum von sieben Jahren diese Investition?

c) Bei Investitionsalternative 3 erhält das Unternehmen als Rückfluss am 1. März 2017 einen Betrag von 30 000 GE, am 1. November 2019 einen Betrag von 40 000 GE, am 1. Mai 2021 einen Betrag von 45 000 GE und am 1. Juni 2022 einen Betrag von 25 000 GE ausgezahlt. Berechnen Sie den Barwert dieser Zahlungen zum Bewertungsstichtag 1. Januar 2016. Verwenden Sie (als Zinsmodell) die relativ gemischte Verzinsung. Lohnt sich diese Investition?

d) Das Unternehmen möchte Investitionsalternative 3 aus Teilaufgabe c) wie folgt verändern:

- Die Zahlungen am 1. Mï¿½rz 2017 und am 1. Juni 2022 sollen so verändert werden, dass sich der Barwert aller Zahlungen zum Bewertungsstichtag 1. Januar 2016 auf 120 000 GE beläuft.
- Die Zahlung am 1. März 2017 soll 0,1% des Quadrats der veränderten Zahlung am 1. Juni 2022 betragen.

Wie hoch ist die Zahlung am 1. Juni 2022, wenn diese positiv sein soll? Verwenden Sie (als Zinsmodell) wie in Teilaufgabe c) die relativ gemischte Verzinsung.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $k = 2$ Jahre
$\gamma = 3$ Monate plus (13+11) Tage $= \frac{90}{360} + \frac{24}{360} = \frac{114}{360}$
$K_n = 100\,000 \cdot 1{,}036^2 \cdot \left(1 + \frac{114}{360} \cdot 0{,}036\right) = 108\,553{,}16$
; d.h. das Kapital wächst auf 108 553,16 GE an.

b) $\gamma_1 = 11$ Monate plus 13 Tage $= \frac{330}{360} + \frac{13}{360} = \frac{343}{360}$
k= ein Jahr
$\gamma_2 = 4$ Monate plus 11 Tage $= \frac{120}{360} + \frac{11}{360} = \frac{131}{360}$
$K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{343}{360} \cdot 0{,}036\right) \cdot 1{,}036 \cdot \left(1 + \frac{131}{360} \cdot 0{,}036\right) = 108\,557{,}19$
; d.h. das Kapital wächst auf 108 557,19 GE an.

c) $m = 360$ und $n \cdot m = 720 + 114 = 834$ Tage
$K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}036}{360}\right)^{834} = 108\,697{,}20$
; d.h. das Kapital wächst auf 108 697,20 GE an.

d) $K_n = 100\,000 \cdot 1{,}036^{2+\frac{114}{360}} = 108\,538{,}40$
; d.h. das Kapital wächst auf 108 538,40 GE an.

Lösung zu Aufgabe 5

a.1) $K_5 = 10\,000 \cdot 1{,}008^5 - 100(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}008)\dfrac{1{,}008^3 - 1}{0{,}008} = 6\,761{,}85$
d.h. der Kontostand am 31.12.2021 beträgt 6 761,85 GE.

a.2) $K_9 = 6\,761{,}85 \cdot 1{,}008^4 + 500(4 + 1{,}5 \cdot 0{,}008)\dfrac{1{,}008^2 - 1}{0{,}008} = 11\,008{,}89$
d.h. der Kontostand am 31.12.2025 beträgt 11 008,89 GE.

b) $K_{11} = K_9 \cdot 1{,}008^2 = 11\,185{,}73$
$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{11\,185{,}73}{900 \cdot 1{,}008} \cdot 0{,}008\right]}{\ln 1{,}008} = 13{,}03$
d.h. volle 13 Jahre lang sind die Auszahlungen möglich.

Lösung zu Aufgabe 6

a) 1. $R_0 = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}038^7 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^7} = 120\,933{,}36 > 100\,000$
d.h. die Investition lohnt sich.

2. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{100\,000}{20\,000} \cdot 0{,}038\right]}{1{,}038} = 5{,}65$
d.h. die Jahresrente muss mindestens sechs Jahre bezogen werden.

b) $R_0 = 4\,950 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}038) \cdot \dfrac{1{,}038^7 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^7} = 121\,430{,}09 > 100\,000$
d.h. die Investition lohnt sich.

c) $K_0 = \dfrac{30\,000}{1{,}038(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{40\,000}{1{,}038^3(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{45\,000}{1{,}038^5(1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{25\,000}{1{,}038^6(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}038)} = 28\,719{,}84 + 34\,667{,}98 + 36\,877{,}31 + 19\,675{,}85 = 119\,940{,}98 > 100\,000$
d.h. die Investition lohnt sich.

d) x= Zahlung (in GE) am 1. Juni 2022
$120\,000 = \dfrac{0{,}001 \cdot x^2}{1{,}038(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}038)} + 34\,667{,}98 + 36\,877{,}32 + \dfrac{x}{1{,}038^6(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}038)} = 0{,}000\,957\,328\,1x^2 + 71\,545{,}29 + 0{,}789495x$

$0 = 0{,}000\,957\,328\,1x^2 + 0{,}789495x - 48\,454{,}71$

$0 = x^2 + 824{,}6859x - 50\,614\,530{,}244$

$x = -412{,}343 \pm \sqrt{170\,026{,}714 + 50\,614\,530{,}244} = -412{,}343 \pm \sqrt{50\,784\,556{,}958} = -412{,}343 \pm 7\,126{,}328$

$x = -7\,538{,}726 \notin$ Def.bereich oder $x = 6\,714{,}04$
d.h. die gesuchte Zahlung beträgt 6 714,04 GE.

Finanzmathematik-Klausur vom 07.07.2015

Aufgabe 4

Ein Kapital von 50 000 € wird zu einem nominellen Jahreszins von 1,9% angelegt.

a) Berechnen Sie das Endkapital nach fünf Jahren bei

1. linearer Verzinsung.
2. nachschüssiger Verzinsung.
3. quartalsweiser Verzinsung zum relativen Zins.
4. stetiger Verzinsung.

b) Am Ende eines welchen Jahres übersteigt das Kapital erstmalig den Wert 52 920 €? Beantworten Sie diese Frage für die vier Zinsmodelle aus a).

Aufgabe 5

Zu einem Jahreszins von 1,2 % werden in den Jahren 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 jeweils am Ende des Jahres 5 000 € eingezahlt.

a) Wie hoch ist der Rentenendwert der Einzahlungen?

b) Ab Beginn des Jahres 2022 wird anschließend jeweils zu Beginn eines Jahres der volle Betrag von 4 000 € abgehoben, der Jahreszins beträgt weiterhin 1,2 %.

1. Wie viele Jahre lang kann der volle Betrag von 4 000 € abgehoben werden?
2. Wie hoch ist der Kontostand ein Jahr nach der letzten vollen Abhebung?

Lösung zu Aufgabe 4:

a)
1. $K_5 = 50\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}019) = 54\,750{,}00$
2. $K_5 = 50\,000 \cdot 1{,}019^5 = 54\,933{,}96$
3. $K_5 = 50\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}019}{4}\right)^{20} = 54\,970{,}58$
4. $K_5 = 50\,000 \cdot e^{5 \cdot 0{,}019} = 54\,982{,}94$

b)
1. $52\,920 = 50\,000(1 + n \cdot 0{,}019) \Leftrightarrow n = \dfrac{\frac{52\,920}{50\,000} - 1}{0{,}019} = 3{,}073684$
   d.h. nach drei Jahren und 27 Tagen; d.h. am Ende des vierten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.
2. $n = \dfrac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{\ln 1{,}019} = 3{,}015571$
   d.h. am Ende des vierten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.
3. $j = \left(1 + \dfrac{0{,}019}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}019136$
   $n = \dfrac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{\ln 1{,}019136} = 2{,}99434$ Jahre

d.h. am Ende des dritten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.

4. $52\,920 = 50\,000 \cdot e^{n \cdot 0{,}019} \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{0{,}019} = 2{,}987281$ Jahre
   d.h. am Ende des dritten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_6 = 5\,000 \cdot \dfrac{1{,}012^6 - 1}{0{,}012} = 30\,914{,}53$
   d.h. das Endguthaben beträgt 30 914,53 €.

b)
   1. $R_0 = 30\,914{,}53 \cdot 1{,}012 = 31\,285{,}5$
      $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{31\,285{,}5}{4\,000 \cdot 1{,}012} \cdot 0{,}012]}{\ln 1{,}012} = 8{,}159414$
      d.h. es können acht volle Beträge in Höhe von 4 000 € abgehoben werden.
   2. $K_8 = 31\,285{,}5 \cdot 1{,}012^8 - 4\,000 \cdot 1{,}012 \cdot \dfrac{1{,}012^8 - 1}{0{,}012} = 640{,}859$
      d.h. das Restguthaben beträgt 640,86 €.

Finanzmathematik-Klausur vom 27.01.2015

Aufgabe 4

Bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zins nimmt eine Privatperson bei einer Bank die folgenden drei Kredite zu einem nominellen Jahreszins von 2,31% auf:

- 2 000 € am 31.01.2015
- 3 000 € am 31.03.2016
- 4 000 € am 31.05.2018

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

b) Wie hoch ist der Schuldenstand am 31.12.2018?

c) Am Ende eines welchen Monats übersteigt der Schuldenstand erstmals den Wert von 5 200 €?

d) Am 31.10.2017 werden 5 000 € eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2018?

Aufgabe 5

Frau K. erhält von der Versicherung „Langes Leben" das Angebot, ihre laufende Lebensversicherung vor Ablauf des Vertrages aufzulösen. Der Lebensversicherungsvertrag aus dem Jahr 1958 enthält folgende Konditionen:

- Beginn der Einzahlungen: 01.01.1959
- Vereinbarte monatliche Versicherungsprämie: 1 Deutsche Mark (DM)
- Zahlweise: monatlich nachschüssig
- Garantiezins: 3% p.a.

Die Versicherung bietet Frau K. an, die Lebensversicherung am 31.12.2014 aufzulösen und ihr 1 075 Euro auszuzahlen. Würde Frau K. das reguläre Ende der Versicherung abwarten, so würde die Versicherung ihr am 31.12.2018 einen Betrag in Höhe von 1 250 Euro auszahlen.

a) Rechnen Sie die Monatsprämie von DM in Euro um. Verwenden Sie dabei die Umrechnung: 1 Euro entspricht 1,95883 DM. Runden Sie das Ergebnis - wie bei Geldbeträgen üblich - auf zwei Stellen hinter dem Komma.

b) Berechnen Sie den Barwert der Versicherungsprämien (in Euro) zum 01.01.1959, wenn Frau K. bis zum 31.12.2018 in die Lebensversicherung einbezahlen würde. Verwenden Sie als Rechnungszins den o.g. Garantiezins von 3% p.a.

c) Frau K. beendet die Versicherung am 31.12.2014 und lässt sich den Betrag 1 075 Euro auszahlen. Berechnen Sie den Endwert aller gezahlten Versicherungsprämien in Euro. Verwenden Sie als Rechnungszins den o.g. Garantiezins von 3% p.a.

d) Frau K. beendet die Versicherung am 31.12.2014 und lässt sich den Betrag 1 075 Euro auszahlen. Beurteilen Sie, ob die Entscheidung von Frau K. ökonomisch sinnvoll ist. Berechnen Sie dazu:

- den Endwert der im Zeitraum 01.01.2015 bis 31.12.2018 noch ausstehenden Prämienzahlungen.
- den auf den 31.12.2018 aufgezinsten Auszahlungsbetrag (31.12.2014: 1 075 Euro).

Verwenden Sie bei der Berechnung der beiden Beträge als Rechnungszins einen derzeit realistischen Sparzins in Höhe von 1% p.a.
Vergleichen Sie zur Beurteilung der Entscheidung von Frau K. die Summe dieser beiden Beträge mit dem möglichen Auszahlungsbetrag zum 31.12.2018. Ist die Entscheidung von Frau K. ökonomisch sinnvoll?

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $j = \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}023346$
d.h. der effektive Jahreszins beträgt 2,3346 %.

b) $K_n = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{47} + 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{33} + 4\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{7} = 9\,439{,}97$
d.h. der Schuldenstand beträgt 9 439,97 €.

c) Schuldenstand am 31.03.2016:
$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{14} + 3\,000 = 5\,054{,}58$
$n = \frac{\ln \frac{5\,200}{5\,054{,}58}}{\ln 1{,}023346} = 1{,}229062$
0,229062 Jahre $= 0{,}229062 \cdot 12 = 2{,}74$ Monate
d.h. nach einem Jahr und drei Monaten, also am 30.06.2017.

d) $5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{14} - 9\,439{,}97 = -4\,303{,}52$
d.h. der Kontostand beträgt $-4\,303{,}52$ €

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Monatlich nachschüssige Zahlungen in Euro:
Dreisatz: 1,95583 DM $\widehat{=}$ 1 Euro $\Leftrightarrow$ 1 DM $\widehat{=} \frac{1}{1{,}95583} = 0{,}51$ Euro

b) Nachschüssige Jahres-Ersatzrente $r_J = 0{,}51 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}03) = 6{,}20415$ Euro
Barwert $R_0 = ?$

Laufzeit: 1959 und 1960 = 2 Jahre, 1961 bis 2010 = 50 Jahre, 2011 bis 2018 = 8 Jahre, Summe = 60 Jahre

$R_0 = 6{,}20415 \cdot \dfrac{1{,}03^{60} - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^{60}} = 171{,}7033 \approx 171{,}70$ Euro

c) Laufzeit: 60 Jahre minus 4 Jahre = 56 Jahre

Endwert $R_{56} = 6{,}20415 \cdot \dfrac{1{,}03^{56} - 1}{0{,}03} = 875{,}7392 \approx 875{,}74$ Euro

d) Nachschüssige Jahres-Ersatzrente $r_J = 0{,}51 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}01) = 6{,}14805$ Euro

- Endwert $R_4 = 6{,}20415 \cdot \dfrac{1{,}01^4 - 1}{0{,}01} = 25{,}19134 \approx 25{,}19$ Euro
- $K_4 = 1\,075 \cdot 1{,}01^4 = 1\,118{,}649 \approx 1\,118{,}65$ Euro

Summe der beiden Beträge: $25{,}19 + 1\,118{,}65 = 1\,143{,}84$
d.h. würde Frau K. den Vertrag vorzeitig beenden und gleichzeitig die ursprünglich vereinbarten Monatsprämien zusammen mit dem vorzeitigen Auszahlungsbetrag auf ein Sparkonto legen, so hätte sie am ursprünglich vereinbartem Vertragsende 1 143,84 Euro zur Verfügung.

Der mögliche Auszahlungsbetrag beträgt gemäß dem Versicherungsvertrag 1 250 Euro. Somit wäre dieser Auszahlungsbetrag größer als das oben berechnete Geld auf dem Sparkonto in Höhe von nur 1 143,84 Euro. Insofern ist die Entscheidung von Frau K. ökonomisch betrachtet nicht sinnvoll.

Finanzmathematik-Klausur vom 30.09.2014

Aufgabe 1
Ein Unternehmen nimmt bei seiner Hausbank am 01.11.2011 einen Kredit von 100 000 € auf. Das Unternehmen zahlt an Zins und Tilgung 400 € pro Monat nachschï¿½ssig. Der vereinbarte jï¿½hrliche Zins betrï¿½gt 3,1% .

a) Wie hoch ist die Schuld des Unternehmens nach zehn Jahren, d.h. am 31.10.2021?

b) Das Unternehmen leistet am 31.10.2013 eine Sondertilgung in Höhe von 20 000 €. Wie hoch ist die Schuld des Unternehmens nach zehn Jahren, d.h. am 31.10.2021?

c) Das Unternehmen möchte am 31.10.2013 eine Sondertilgung leisten. Diese soll so bemessen sein, dass die Restschuld am 31.10.2021 die Hï¿½lfte der Anfangsschuld betrï¿½gt. Wie hoch ist die Sondertilgung?

Aufgabe 2
Die Wucher-Kredit GmbH verleiht Kapital zu einem nominellen Jahreszinsfuß von 20%, wobei sie die anfallenden Kreditzinsen am Ende eines jeden Vierteljahres der Schuld zuschlägt (unterjährliche Verzinsung zum relativen Zins). Ein Privatmann hat bei dieser Gesellschaft am 30. Juni 2013 ein Darlehen über 100 000 € aufgenommen, das er am 31.12.2017 zurückzahlen muss.

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszinsfuß dieses Darlehens?

b) Wie hoch ist der Betrag, den der Privatmann am Ende der Laufzeit an die Wucher-Kredit-GmbH zurückzahlen muss?

c) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden des Privatmanns zum ersten Mal die 200 000 € Grenze?

d) Angenommen dem Privatmann fließen am 30.09.2015 aus unbekannter Quelle 50 000 € zu, die er unmittelbar an die Wucher-Kredit-GmbH weitergibt, um seinen Rückzahlungsbetrag am 31.12.2017 zu reduzieren. Wie hoch werden seine Schulden am Ende der Laufzeit dann noch sein?

Lösung zu Aufgabe 1
Jahresersatzrente $r_j = 400(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}031) = 4\,868{,}2$

a) $K_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}031^{10} - 4\,868{,}2 \cdot \dfrac{1{,}031^{10} - 1}{0{,}031} = 135\,702{,}13 - 56\,066{,}16 = 79\,635{,}97$
d.h. die Restschuld betrï¿½gt 79 635,97 €.

b) $K_{10} - 20\,000 \cdot 1{,}031^8 = 54\,103{,}12$
d.h. die Restschuld betrï¿½gt 54 103,12 €.

c) x=Sondertilgung am 31.10.2013
$50\,000 = K_{10} - x \cdot 1{,}031^8 = 79\,635{,}97 - x \cdot 1{,}276643$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1{,}276643 = 29\,635{,}97 \Leftrightarrow x = \frac{29\,635{,}97}{1{,}276643} = 23\,213{,}99$$

d.h. die Sondertilgung betrï¿½gt 23 213,99 €.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $$K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^4 = 100\,000 \cdot 1{,}05^4 = 100\,000 \cdot 1{,}2155 = 121\,550,63$$

d.h. der effektive Jahreszins beträgt 21,55%.

b) Laufzeit:

2013	2 Quartale
2014	4 Quartale
2015	4 Quartale
2016	4 Quartale
2017	4 Quartale
$\sum$	18 Quartale = 4,5 Jahre

$$K_{4{,}5} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4 \cdot 4{,}5} = 100\,000 \cdot 1{,}05^{18} = 240\,661{,}92$$

d.h. er muss 240 661,92 € zurückzahlen.

c) n= Laufzeit in Jahren =?

$$\begin{aligned}
200\,000 &= 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4 \cdot n} && \mid \div 100\,000 \\
2 &= 1{,}05^{4 \cdot n} && \mid \text{Logarithmus} \\
4 \cdot n &= \log_{1{,}05} 2 && \mid \text{Umrechnungsformel} \\
4 \cdot n &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} = 14{,}207 && \mid \div 4 \\
n &= 3{,}55
\end{aligned}$$

d.h. nach vier vollen Jahren wird erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten.

d) Die Rückzahlung über 50 000 GE wird $2\frac{1}{4}$ Jahre nach Kreditaufnahme getätigt.

$$240\,661{,}92 - 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4 \cdot 2{,}25} = 240\,661{,}92 - 50\,000 \cdot 1{,}05^9 = 163\,095{,}51$$

d.h. er muss 163 095,51 zurückzahlen.

Finanzmathematik-Klausur vom 11.07.2014

Aufgabe 4
Eine Firma kalkuliert bei einem Jahreszins von 4,2% verschiedene Finanzierungsmodelle zur Anschaffung eines neuen Kopierers für 20 000 €.

a) Wie hoch wären fünf gleich hohe jährliche Zahlungen, erste Rate ist fällig beim Erwerb des Kopierers?

b) Wie hoch wären vorschüssige Monatszahlungen über fünf Jahre, erste Zahlung ist fällig beim Erwerb des Kopierers?

c) Angenommen es würden sechs Jahre lang jeweils zu Beginn eines Quartals 800 € zurückgezahlt, erste Zahlung wäre fällig beim Erwerb des Kopierers. Im siebten und achten Jahr würden Zahlungen ausgesetzt. Wie hoch wäre dann die Restschuld am Ende des achten Jahres?

Aufgabe 5
Frau Müller hat aufgrund einer Bonuszahlung ihres Arbeitgebers am 19.12.2014 einen Betrag von 10 000 € zur Verfügung. Sie überlegt, was sie mit dem Geld machen soll. Ihre Bank bietet ihr eine Spareinlage mit einem Jahreszins von 1,7% an.

a) Welchen Betrag hätte Frau Müller bei diesen Konditionen am 14.03.2017 zur Verfügung, wenn man von der relativ gemischten Verzinsung ausgeht?

b) Frau Müller legt das Geld zu den oben genannten Konditionen bei relativ gemischter Verzinsung an. Kann sie damit zwei Großausgaben, eine am 06.04.2016 in Höhe von 5 000 € und eine am 14.03.2017 in Höhe von 5 350 €, vollständig finanzieren? Bewertungsstichtag 19.12.2014.

c) Frau Müller macht eine Modellrechnung. Angenommen sie bekommt für die ersten beiden Jahre, d.h. vom 19.12.2014 bis zum 19.12.2016, einen Jahreszins von 1,75%. Welchen Jahreszins müsste sie ab 19.12.2016 vereinbaren, wenn sie am 14.03.2017 einen Betrag von 10 400 € angespart haben möchte und die Verzinsung dem Prinzip der relativ gemischten Verzinsung folgt?

d) Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a) und b) für den Fall, dass die relativ gemischte Verzinsung durch die konforme Verzinsung ersetzt wird.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $20\,000 = r_j' \cdot 1{,}042 \cdot \dfrac{1{,}042^5 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^5} = r_J' \cdot 4{,}612851 \Leftrightarrow r_J' = 4\,335{,}714$
d.h. die Zahlungen würden 4 335,71 € betragen

b) $r_J = 4\,335{,}714 \cdot 1{,}042 = 4\,517{,}814$
$4\,517{,}814 = r_M' \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = r_M' \cdot 12{,}273 \Leftrightarrow r_M' = 368{,}11$
d.h. die monatlichen Zahlungen würden 368,11 € betragen.

c) $r_J = 800(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) = 3\,284$

$$K_6 = 20\,000 \cdot 1{,}042^6 - 3\,284 \cdot \frac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} = 3\,707{,}294$$

$3\,707{,}294 \cdot 1{,}042^2 = 4\,025{,}246$

d.h. die Restzahlung würde 4 025,25 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) 19.12.2014 bis 14.03.2017 = 11 Tage, 2 Jahre, 2 Monate, 14 Tage =2 Jahre, 2 Monate und 25 Tage = $2 + \frac{2}{12} + \frac{25}{360}$ Jahre = 2,2361 Jahre

$K_{2{,}2361} = 10\,000 \cdot 1{,}017^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot 0{,}017) = 10\,384{,}40$

d.h. Frau Müller hätte 10 384,40 € angespart.

b) 19.12.2014 bis 06.04.2016= 11 Tage, 1 Jahr, 3 Monate, 6 Tage = 1 Jahr, 3 Monate und 17 Tage = $1 + \frac{3}{12} + \frac{17}{360}$ Jahre = = 1,2972 Jahre

Summe der Barwerte beider Beträge:

$$\frac{5\,000}{1{,}017 \cdot \left(1 + \frac{90+17}{360} \cdot 0{,}017\right)} + \frac{5\,350}{1{,}017^2 \cdot \left(1 + \frac{60+25}{360} \cdot 0{,}017\right)}$$

$$= \frac{5\,000}{1{,}017 \cdot (1 + 0{,}2972 \cdot 0{,}017)} + \frac{5\,350}{1{,}017^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot 0{,}017)}$$

$= 4\,891{,}71 + 5\,151{,}96 = 10\,043{,}67 > 10\,000$

D.h. die beiden Großausgaben können damit nicht vollständig finanziert werden.

c) $10\,400 = 10\,000 \cdot 1{,}0175^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot i)$

$$\Rightarrow \frac{10\,400}{10\,000 \cdot 1{,}0175^2} = 1 + 0{,}2361 \cdot i$$

$$\Rightarrow \frac{10\,400}{10\,000 \cdot 1{,}0175^2} - 1 = 0{,}004534 = 0{,}2361 \cdot i \Rightarrow i = 0{,}01920$$

d.h. der Jahreszins beträgt 1,92%.

d) Zu a) $K_{2{,}2361} = 10\,000 \cdot 1{,}017^{2{,}2361} = 10\,384{,}14$

d.h. Frau Müller hätte 10 384,14 € angespart.

Zu b) $\frac{5\,000}{1{,}017^{1{,}2972}} + \frac{5\,350}{1{,}017^{2{,}2361}} = 4\,891{,}85 + 5\,152{,}09 = 10\,043{,}94 > 10\,000$

d.h. die beiden Großausgaben können damit nicht vollständig finanziert werden.

Finanzmathematik-Klausur vom 27.01.2014

Aufgabe 4
Ein Unternehmen nimmt zur Finanzierung einer Maschine bei der XYZ-Bank einen Kredit zu folgenden Konditionen auf:

- Kreditsumme: 100 000 €
- Auszahlungsdatum des Kredits: 01.01.2012
- Jahreszins: 2,88%
- Monatlich nachschï¿½ssige Zahlung an die XYZ-Bank für Tilgung und Zinsen: 800 €

a) Muss das Unternehmen die Zahlungen an die XYZ-Bank lï¿½nger als zehn Jahre, d.h. ï¿½ber den 31.12.2021 hinaus leisten? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie den Barwert der Zahlungen der ersten zehn Jahre berechnen und diesen mit der Kreditsumme vergleichen.

b) Wie viele Jahre muss das Unternehmen alle zwï¿½lf Monatszahlungen in voller Höhe leisten?

c) Wie hoch ist die Restschuld am Ende des Jahres, in dem das Unternehmen letztmalig alle zwï¿½lf Monatszahlungen in voller Höhe zu leisten hat?

d) Das Unternehmen möchte die Restschuld, die sich in Teilaufgabe c) ergibt, mit einer vorgezogenen - aber dafür niedrigeren - Zahlung am 31.12.2013 begleichen. Wie hoch muss diese Zahlung sein?

e) Das Unternehmen leistet am 31.12.2013 eine Sonderzahlung in Höhe von 18 000 € an die XYZ-Bank. Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) unter Berï¿½cksichtigung dieser Sonderzahlung.

Aufgabe 5
Auf einem Konto mit 2,1% nominellem Jahreszins befinden sich folgende Zahlungsvorgï¿½nge:

- Einzahlung von 10 000 € am 31.12.2014
- Abhebung von 8 000 € am 31.05.2016
- Einzahlung von 2 000 € am 31.10.2017

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.10.2017 bei

   1. relativ gemischter Verzinsung? (Bewertungsstichtag 31.10.2017)

2. monatlicher Verzinsung zum relativen Zins?
3. konformer Verzinsung?

b) Am Ende eines welchen Monats nach der letzten Einzahlung liegt der Kontostand erstmals ï¿½ber 4 397,90 € bei

   1. monatlicher Verzinsung zum relativen Zins?
   2. konformer Verzinsung?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r_J = 800 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0288) = 9\,726{,}72$
$$R_0 = 9\,726{,}72 \cdot \frac{1{,}0288^{10} - 1}{0{,}0288} \cdot \frac{1}{1{,}0288^{10}} = 83\,481{,}34 < 100\,000$$
d.h. die Rï¿½ckzahlung lï¿½uft ï¿½ber mehr als zehn Jahre.

b) $$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{100\,000}{9\,726{,}72} \cdot 0{,}0288\right]}{\ln 1{,}0288} = 12{,}36594$$
d.h. zwï¿½lf Jahre lang sind volle Monatszahlungen zu leisetn.

c) $$K_{12} = 100\,000 \cdot 1{,}0288^{12} - 9\,726{,}72 \cdot \frac{1{,}0288^{12} - 1}{0{,}0288} = 3\,490{,}929$$
d.h. die Restschuld betrï¿½gt 3 490,93 €.

d) $$\frac{3\,490{,}93}{1{,}0288^{10}} = 2\,628{,}038$$
d.h. die Vorauszahlung betrï¿½gt 2 628,04 €.

e) Barwert der Zahlungen am 01.01.2012:
$$83\,481{,}34 + \frac{18\,000}{1{,}0288^2} = 100\,487{,}67 > 100\,000$$
d.h. das Unternehmen muss keine Rückzahlungen ï¿½ber den 31.12.2021 hinaus leisten.

Lösung zu Aufgabe 5

a) 1. $K_n = 10\,000 \cdot 1{,}021^2 \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}021\right) - 8\,000 \cdot 1{,}021 \cdot \left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}021\right) + 2\,000 = 4\,367{,}37$
   d.h. der Kontostand betrï¿½gt 4 367,37 €.
   2. $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^{34} - 8\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^{17} + 2\,000 = 4\,371{,}14$
   d.h. der Kontostand betrï¿½gt 4 371,14 €.
   3. $K_n = 10\,000 \cdot 1{,}021^{34/12} - 8\,000 \cdot 1{,}021^{17/12} + 2\,000 = 4\,367{,}48$
   d.h. der Kontostand betrï¿½gt 4 367,48 €.

b) 1. *1. Lösungsweg:*

$$4\,371{,}14 \cdot \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^x = 4\,397{,}90 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,371{,}14}\right)}{\ln\left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)} = 3{,}491 \text{ Monate}$$

d.h. nach vier Monaten; d.h. am 28.02.2018 liegt der Kontostand erstmals ï¿½ber dem genannten Betrag.

2. Lösungsweg:

$$j = \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}02120331$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,371{,}14}\right)}{\ln 1{,}02120331} = 0{,}3308115 \text{ Jahre } = 0{,}3308115 \cdot 12 = 3{,}491 \text{ Monate}$$

d.h. nach vier Monaten; d.h. am 28.02.2018 liegt der Kontostand erstmals ï¿½ber dem genannten Betrag.

2. $$4\,367{,}48 \cdot 1{,}021^x = 4\,397{,}90 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,367{,}48}\right)}{\ln 1{,}021} = 0{,}3339809 \text{ Jahre}$$

$0{,}3339809 \cdot 12 = 4{,}00777$ Monate

d.h. nach fï¿½nf Monaten; d.h. am 31.03.2018 liegt der Kontostand erstmals ï¿½ber dem genannten Betrag.

Finanzmathematik-Klausur vom 10.07.2013

Aufgabe 4
Gegeben sei die folgende Rente:

- Laufzeit: 10 Jahre
- Zahlweise: jï¿½hrlich vorschï¿½ssig
- Datum der ersten Rentenrate: 01.01.2014
- Rentenrate: 1 500 €

Diese Rente soll umgewandelt werden

a) in eine fï¿½nf Jahre lang monatlich nachschï¿½ssig zu zahlende Rente, erste Rentenrate fällig am 31.01.2014.

b) in eine sieben Jahre lang halbjï¿½hrlich vorschï¿½ssig zu zahlende Rente, erste Rentenrate fällig am 01.01.2016.

Wie hoch ist jeweils die Höhe der Rentenrate? Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von einem Jahreszins von 4,3% aus.

Aufgabe 5
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie am 01.01.2014 einen Kredit in Höhe von 150 000 € auf. Als Rückzahlung werden Annuitï¿½ten in Höhe von 9 650 € vereinbart, die erste Annuitï¿½t ist fällig am 31.12.2014.

a) Wie viele volle Annuitï¿½ten sind zu zahlen, wenn der Jahreszins 3,1% betrï¿½gt?

b) Wie hoch ist der Tilgungsbetrag der Annuitï¿½t vom 31.12.2025, wenn der Jahreszins 3,1% betrï¿½gt?

c) Am 01.01.2020 steigen die Jahreszinsen von vorher 3,1% auf 5,2%.

   1. An welchem Datum ist die letzte volle Annuitï¿½t zu zahlen?
   2. Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuitï¿½t?

Lösung zu Aufgabe 4:
Barwert der vorsch. Jahresrente ï¿½ber 1 500 €:

$$R_0 = 1\,500 \cdot 1{,}043 \cdot \frac{1{,}043^{10} - 1}{0{,}043} \cdot \frac{1}{1{,}043^{10}} = 12\,502{,}09$$

a) Nachschï¿½ssige Jahresersatzrente r_J:

$$12\,502{,}09 = r_J \cdot \frac{1{,}043^{5} - 1}{0{,}043} \cdot \frac{1}{1{,}043^{5}} \Leftrightarrow r_J = 2\,832{,}018$$

Nachschï¿½ssige Monatsrente r_M:

$2\,832{,}018 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}043) \Leftrightarrow r_M = 231{,}4402$
d.h. die Monatsrente betrï¿½gt 231,44 €.

b) Barwert der halbj. Rente:
$12\,502{,}09 \cdot 1{,}043^2 = 13\,600{,}39$
Nachschï¿½ssige Jahresersatzrente r_J:
$$13\,600{,}39 = r_J \cdot \frac{1{,}043^7 - 1}{0{,}043} \cdot \frac{1}{1{,}043^7} \Leftrightarrow r_J = 2\,291{,}143$$
Vorschï¿½ssige Halbjahresrente r_H:
$2\,291{,}143 = r_H(2 + 1{,}5 \cdot 0{,}043) \Leftrightarrow r_H = 1\,109{,}781$
d.h. die Halbjahresrente betrï¿½gt 1 109,78 €.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{150\,000}{9\,650} \cdot 0{,}031\right]}{\ln 1{,}031} = 21{,}53741$$
d.h. es sind 21 volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

b) *1. Lösungsweg:*
$T_1 = A - K_0 \cdot 0{,}031 = 5\,000$
$T_{12} = T_1 \cdot 1{,}031^{11} = 6\,995{,}445$
2. Lösungsweg:
$$K_{11} = 150\,000 \cdot 1{,}031^{11} - 9\,650 \cdot \frac{1{,}031^{11} - 1}{0{,}031} = 85\,630{,}82$$
$Z_{12} = K_{11} \cdot 0{,}031 = 2\,654{,}555$
$T_{12} = A - Z_{12} = 6\,995{,}445$
3. Lösungsweg:
$$A = T_1 \cdot 1{,}031^n \Leftrightarrow T_1 = \frac{A}{1{,}031^n} = \frac{9\,650}{1{,}031^{21{,}53741}} = 5\,000$$
$T_{12} = T_1 \cdot 1{,}031^{11} = 6\,995{,}445$
d.h. die Tilgung betrï¿½gt 6 995,45€.

c) Restschuld am 01.01.2020:
$$K_6 = 150\,000 \cdot 1{,}031^6 - 9\,650 \cdot \frac{1{,}031^6 - 1}{0{,}031} = 117\,576{,}6378$$

1. $$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{117\,576{,}6378}{9\,650} \cdot 0{,}052\right]}{\ln 1{,}052} = 19{,}80461$$
d.h. die letzte volle Annuitï¿½t ist zu zahlen am 31.12.2038.

2. $$K_{6+19} = 117\,576{,}6378 \cdot 1{,}052^{19} - 9\,650 \cdot \frac{1{,}052^{19} - 1}{0{,}052} = 7\,417{,}092$$
$7\,417{,}092 \cdot 1{,}052 = 7\,802{,}78$
die Restzahlung betrï¿½gt 7 802,78 €.

Finanzmathematik-Klausur vom 06.02.2013

Aufgabe 4
Eine mit 9% p.a. zu verzinsende Schuld in Höhe von 200 000 Euro soll vom Ende des ersten Jahres an durch jï¿½hrliche Zahlungen in Höhe von 20 000 Euro zurï¿½ck gezahlt werden.

a) Wie hoch ist der erste Tilgungssatz und wie hoch ist der erste Tilgungsbetrag?

b) Wie viele Annuitï¿½ten kï¿½nnen in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch wï¿½ren monatlich vorschï¿½ssige Rückzahlungsbetrï¿½ge bei nach wie vor 9% Jahreszinsen ausgefallen? (Erster monatlicher Rückzahlungsbetrag fällig bei Kreditaufnahme.)

Aufgabe 5
Auf ein Konto werden folgende Betrï¿½ge eingezahlt:

- 10 000 Euro am 31.12.2013
- 20 000 Euro am 31.12.2015
- 30 000 Euro am 31.12.2016

Aus diesen Einzahlungen soll eine jï¿½hrliche Rente ï¿½ber 5 000 Euro finanziert werden, erste Rentenauszahlung ist fällig am 01.01.2020. Der Jahreszins betrï¿½gt 1,2%.

a) Wie hoch ist der Barwert der Rente?

b) Wie oft kann die volle Jahresrente ausgezahlt werden?

c) Wie hoch ist das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung?

Aufgabe 6
Ein Druck-Unternehmen ï¿½berlegt die Anschaffung einer neuen Maschine. Es stehen drei Alternativen zur Diskussion. Sie bekommen von der Geschï¿½ftsfï¿½hrung die Aufgabe, die sinnvollste Alternative auszuwï¿½hlen.
Von der Geschï¿½ftsfï¿½hrung wird ein Kalkulationszins von 10% p.a. (Erwartungszins) angesetzt. Ferner wird von der Geschï¿½ftsfï¿½hrung vorgegeben, dass nur solche Alternativen in Betracht kommen, bei denen spï¿½testens zum Ende des dritten Jahres die Summe der aufgezinsten ï¿½berschï¿½sse die aufgezinste Investitionssumme ï¿½bertrifft.
Für die drei Alternativen gelten folgende Daten (Werte in €):

Alternative	Anschaffungs-auszahlung	ï¿½berschï¿½sse			
		1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
A	50 000	20 000	15 000	10 000	40 000
B	50 000	25 000	10 000	15 000	25 000
C	50 000	15 000	35 000	15 000	5 000

Dabei erfolgt die Wertstellung der ï¿½berschï¿½sse zum jeweiligen Jahresende.

a) Welche Alternative wï¿½hlen Sie aus, wenn Sie sich an die Vorgaben der Geschï¿½ftsfï¿½hrung halten?

b) Welche Alternative wï¿½hlen Sie aus, wenn es um eine Entscheidung auf Basis des Kapitalwerts bezogen auf die ï¿½berschï¿½sse der ersten vier Jahre ginge?

Aufgabe 7

a) Bei einer Investitionsrechnung wird als Kalkulationszins ein HABEN-Zins eingesetzt, d.h. ein Zins wie er auch bei einer Geld-Anlage „auf der Bank" gewï¿½hrt wird. Das Ergebnis für den Kapitalwert betr ï¿½gt $K_0 = 0$. Welche (eventuell alternativen) Konsequenzen hat dieses Ergebnis?

b) Da eine dringend notwendige Investition mit einem Kredit finanziert werden muss, wird in einer Investitionsrechnung als Kalkulationszinsfuß ein SOLL-Zins (d.h. der Kreditzins) eingesetzt. Das Ergebnis für den Kapitalwert betrï¿½gt $K_0 = 0$. Welche (eventuell alternativen) Konsequenzen hat dieses Ergebnis?

c) Eine Investition wird von der Geschï¿½ftsleitung nur genehmigt werden, wenn mindestens ein vorgegebener erwarteter Zins (Erwartungszins) erwirtschaftet wird. Bei einer Investitionsrechnung mit diesem Erwartungszins als Kalkulationszins ergibt sich als Ergebnis für den Kapitalwert $K_0 = 0$. Welche Konsequenz hat dieses Ergebnis hinsichtlich der Genehmigung dieser Investition?

Aufgabe 8

a) Her Müller hat zum 31.12.2009 bei der ABC-Bank ein Giro-Konto erï¿½ffnet. Die Guthabenzinsen betragen in allen Jahren konstant 1,5% pro Jahr, die ï¿½berziehungszinsen konstant 9,6% pro Jahr. In den Jahren 2009 bis 2012 gab es folgende Kontobewegungen:

- 31.12.2009: Einzahlung von 2 000 €
- 31.03.2010: Einzahlung von 5 000 €
- 31.01.2011: Abhebung von 10 000 €
- 31.03.2012: Einzahlung von 4 000 €

Berechnen Sie die Kontostï¿½nde jeweils zum Ende (31.12.) der Jahre 2010, 2011 und 2012. Verwenden Sie als Zinsmodell die monatliche Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zinssatz.

b) Frau Meier hat zum 31.12.2009 bei der XYZ-Bank ein Giro-Konto erï¿½ffnet. Die Guthabenzinsen betragen in allen Jahren konstant 1,5% pro Jahr. Der Zinssatz der ï¿½berziehungszinsen ist im relevanten Zeitraum ebenfalls konstant. In den Jahren 2009 bis 2012 gab es folgende Kontobewegungen:

- 31.12.2009: Einzahlung von 5 000 €
- 30.06.2010: Einzahlung von 7 000 €
- 30.06.2011: Einzahlung von 8 000 €

- 31.03.2012: Abhebung von 24 000 €

Zum Ende des Jahres 2012 muss Frau Meier der XYZ-Bank 319,80 € als ï¿½berziehungszinsen bezahlen. Wie hoch ist der jï¿½hrliche nominelle Zinssatz für die ï¿½berziehungszinsen. Verwenden Sie als Zinsmodell die monatliche Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zinssatz.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\frac{20\,000}{200\,000} = 0{,}1 = 10\%$ Prozentannuitï¿½t
$10\% - 9\% = 1\%$
$200\,000 \cdot 0{,}01 = 2\,000$
d.h. der erste Tilgungssatz betrï¿½gt 1%, die erste Tilgungsrate betrï¿½gt 2 000 Euro.

b) $n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{20\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln(1{,}09)} = 26{,}7$
d.h. es sind 26 volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

c) $20\,000 = r'_M(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}09) \Rightarrow r'_M = 1\,589{,}19$
d.h. monatlich vorschï¿½ssige Raten betragen 1 589,19 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $10\,000 \cdot 1{,}012^6 + 20\,000 \cdot 1{,}012^4 + 30\,000 \cdot 1{,}012^3 = 62\,812{,}38$
d.h. der Rentenbarwert betrï¿½gt 62 812,38 Euro.

b) $n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{62\,812{,}38}{5\,000 \cdot 1{,}012} \cdot 0{,}012\right]}{\ln 1{,}012} = 13{,}52205$
d.h. die volle Rente kann dreizehnmal ausgezahlt werden.

c) $62\,812{,}38 \cdot 1{,}012^{13} - 5\,000 \cdot 1{,}012 \cdot \frac{1{,}012^{13} - 1}{0{,}012} = 2\,617{,}674$
d.h. das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung betrï¿½gt 2 617,67 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Nennwert der ersten drei Periodenï¿½berschï¿½sse von Alternative A:
$20\,000 + 15\,000 + 10\,000 = 45\,000 < 50\,000$
Nennwert der ersten drei Periodenï¿½berschï¿½sse von Alternative B:
$25\,000 + 10\,000 + 15\,000 = 50\,000 = 50\,000$
Nennwert der ersten drei Periodenï¿½berschï¿½sse von Alternative C:
$15\,000 + 35\,000 + 15\,000 = 65\,000 > 50\,000$
d.h. nur die Investition in Alternative C kï¿½nnte sich lohnen. Genauer gilt:
$K_0^C = \frac{15\,000}{1{,}10} + \frac{35\,000}{1{,}10^2} + \frac{15\,000}{1{,}10^3} - 50\,000 = 3\,831{,}71 > 0$
d.h. der Kapitalwert ist positiv, somit lohnt sich die Investition.

b) $K_0^A = \dfrac{20\,000}{1{,}10} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{10\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{40\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 15\,412{,}20$

$K_0^B = \dfrac{25\,000}{1{,}10} + \dfrac{10\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{25\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 9\,336{,}79$

$K_0^C = \dfrac{15\,000}{1{,}10} + \dfrac{35\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{5\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 7\,246{,}77$

d.h. die Alternative A ist vorteilhafter als B und C.

Lösung zu Aufgabe 7:

Betrï¿½gt der Kapitalwert null, so sollten nicht-monetï¿½re Kriterien wie Erhalt von Arbeitsplï¿½tzen, Modernisierung, Umsatzsteigerung etc. herangezogen werden, um zu entscheiden, ob investiert werden soll oder nicht.

a) Es kï¿½nnte investiert werden oder das Geld in Höhe der Anschaffungskosten kï¿½nnte auf einer Bank angelegt werden.

b) Rein rechnerisch lohnt sich die Investition nicht, es kï¿½nnte aber auch investiert werden.

c) Wenn lediglich der Erwartungszins erfï¿½llt sein soll, so kï¿½nnte investiert werden.

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Kontostand am 31.12.2010:

$$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{12} + 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} = 7\,086{,}74$$

Kontostand am 31.12.2011:

$$\left(7\,086{,}74 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right) - 10\,000\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}096}{12}\right)^{11} = -3\,170{,}46$$

Kontostand am 31.12.2012:

$$\left(-3\,170{,}46 \cdot \left(1 + \frac{0{,}096}{12}\right)^{3} + 4\,000\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} = 761{,}35$$

b) Guthaben am 31.03.2012:

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{27} + 7\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{21} + 8\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} - 24\,000 =$$

$20\,448{,}04 - 24\,000 = -3\,551{,}96$

Schulden am 31.12.2012 mit ï¿½berziehungszinssatz i:

$$3\,551{,}96 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{9} = 319{,}68 + 3\,551{,}96 = 3\,871{,}64$$

Division durch 3 551,96 ergibt:

$$\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{9} = 1{,}090001$$

Neunte Wurzel ziehen ergibt:

$$1 + \frac{i}{12} = 1{,}009621$$

Minus eins mal zwï¿½lf ergibt:

$i = 0{,}009621 \cdot 12 = 0{,}1154567$
d.h. der gesuchte ï¿½berziehungszins betrï¿½gt 11,55% pro Jahr.

Finanzmathematik-Klausur vom 24.09.2012

Aufgabe 4

Bei relativ gemischter Verzinsung zu 4% pro Jahr besteht die folgende Zahlungsverpflichtung:

- 1 000 Euro am 31.03.2014
- 2 000 Euro am 31.08.2015
- 3 000 Euro am 31.12.2018

Die Schulden sollen zurï¿½ckgezahlt werden durch

a) eine einmalige Zahlung am 31.07.2013. Wie hoch ist die einmalige Rückzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

b) zwei gleich hohe Betrï¿½ge am 31.03.2014 und am 31.12.2018. Wie hoch sind die beiden Betrï¿½ge, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

c) eine Zahlung ï¿½ber 2 500 Euro am 31.05.2017 und eine Restzahlung am 31.12.2018. Wie hoch ist die Restzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

Aufgabe 5

a) Sie ï¿½berlegen, eine (nicht unbedingt betriebsnotwendige) Investition durchzufï¿½hren und rechnen die Investition mit einer Laufzeit von zehn Jahren und einem Jahreszins von 6%, da Sie einen Zins von 6% (p.a.) bekommen wï¿½rden, wenn Sie statt der Investition das Geld „auf der Bank“ anlegen wï¿½rden. Die Investitionsrechnung ergibt einen positiven Kapitalwert. Die Berechnung des internen Zinsfuï¿½es ergibt: 6,09%. Wie beurteilen Sie diese Investition?

b) Wenn eine Investitionsrechnung als Ergebnis einen Kapitalwert von null (also $K_0 = 0$) ergibt, bedeutet das <u>immer</u>, dass die Investition unvorteilhaft ist? (Begrï¿½ndung!)

c) Wenn Sie spï¿½ter im Beruf von der Geschï¿½ftsfï¿½hrung die Aufgabe bekommen, für diese als Entscheidungsgrundlage eine Investitionsrechnung durchzufï¿½hren, sollte Ihnen klar sein, dass die eigentliche (mathematische) Investitionsrechnung nur der kleinere Teil Ihrer Arbeit sein wird.

   Was wird den grï¿½ï¿½ten Teil Ihrer Arbeit ausmachen?

Aufgabe 6

Der Amerikaner Jarry Lee kaufte 1969 (gilt als erstes Jahr) den Aston Martin DB

5 aus dem alten James-Bond-Film „Goldfinger“ für umgerechnet 40 000 €. In 2010 (gilt als letztes Jahr) verkaufte er das Auto für 3 Mio €.

a) Wie hoch ist die jï¿½hrliche Rendite (interner Zins)?

b) Dieser Wagen wird jetzt Ihnen zum Kauf angeboten. Wie viel Geld dï¿½rfen Sie maximal für den Ankauf einsetzen, wenn Sie das Auto nach zwei Jahren für 3,6 Mio € wieder verkaufen wï¿½rden und eine jï¿½hrliche Rendite von mindestens 15% erzielen wollen?

Aufgabe 7

Für einen Hauskauf wird bei 3,8% Jahreszinsen ein Kredit in Höhe von 246 000 Euro aufgenommen.

a) Als Rückzahlung des Kredits werden vorschï¿½ssige Monatsraten in Höhe von 1 500 Euro vereinbart sowie eine Restzahlung einen Monat nach der letzten vollen Monatsrate. Die erste Monatsrate ist fällig bei Kreditaufnahme.

1. Wie viele Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen?
2. Wie hoch ist die Restzahlung einen Monat nach der letzten vollen Monatsrate?

b) Als Rückzahlung des Kredits wird eine Annuitï¿½tentilgung ï¿½ber zwanzig Jahre vereinbart, erste Annuitï¿½t fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme.

1. Wie hoch sind die Annuitï¿½ten?
2. Geben Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuitï¿½t, Restschuld jeweils am Ende des Jahres) für das siebte Tilgungsjahr an.

Aufgabe 8

Ein Brauereiunternehmen ï¿½berlegt die Anschaffung einer neuen, extrem energieeffizienten Abfï¿½llanlage als Ersatz für eine bestehende Anlage. Für diese **neue** Anlage gilt:

Anschaffungsauszahlung (Anschaffungskosten):	450 000 €
Nutzungsdauer:	5 Jahre
Liquidationserlï¿½s am Ende der Nutzungsdauer:	40 000 €
Fixe Betriebskosten der Anlage pro Jahr:	50 000 €
Variable Betriebskosten je Flasche:	0,02 €

Nach drei Jahren wï¿½re eine ï¿½berholung der neuen Anlage nï¿½tig, die eine Ausgabe von 30 000 € bedeuten wï¿½rde.

Die **bestehende** Anlage ist verbunden mit:

Fixe Betriebskosten pro Jahr:	100 000 €
Variable Kosten pro Flasche:	0,10 €

Jï¿½hrlich werden 800 000 Flaschen abgefï¿½llt. Der Kalkulationszinsfuï¿½ betrï¿½gt 5% p.a. Lohnt sich die neue Anlage? (Begrï¿½ndung!)

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = \dfrac{1\,000}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \dfrac{2\,000}{1{,}04^2 \cdot (1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}04)} + \dfrac{3\,000}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} = 5\,242{,}35$

d.h. die einmalige Rückzahlung betrï¿½gt 5 242,35 Euro.

b) $5\,242{,}35 = \dfrac{x}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \dfrac{x}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} \Rightarrow 5\,242{,}35 = 1{,}782479x \Rightarrow x = 2\,941{,}05$

d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2 941,05 Euro.

c)
$$\begin{aligned}
5\,242{,}35 &= \frac{2\,500}{1{,}04^3 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}04)} + \frac{x}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} \\
5\,242{,}35 &= = 2\,150{,}80 + 0{,}8084529x \\
3\,091{,}55 &= 0{,}8084529x \\
x &= 3\,824{,}03
\end{aligned}$$

d.h. die Restzahlung betrï¿½gt 3 824,03 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Rein rechnerisch betrachtet lohnt die Investition, weil K_0 positiv ist und somit der interne Zins ï¿½ber dem Kalkulationszins liegt. Ist der Bankzins von 6% als sicher anzusehen, so erscheint betriebswirtschaftlich betrachtet eine erwartete (also nicht sichere) Rendite von 6,09% als „geringfï¿½gig“ Höher als der sichere Bankzins, als Konsequenz kï¿½nnte das Riskio der Investition unterlassen werden.

b) Nein, $K_0 = 0$ bedeutet nicht immer, dass die Investition unrentabel ist. Hier wï¿½ren für eine Investitionsentscheidung andere Argumente wie z.B. Erhalt der Arbeitsplï¿½tze, Erhalt des firmeninternen Fachwissens, Image des Unternehmens heranzuziehen.

c) Die eigentliche Arbeit ist das Schï¿½tzen der Höhe der jï¿½hrlichen Periodenï¿½berschï¿½sse.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $0 = \dfrac{3\,000\,000}{q^{42}} - 40\,000 \Leftrightarrow q = \sqrt[42]{\dfrac{3\,000\,000}{40\,000}} = 1{,}108267$

d.h. der interne Zins betrï¿½gt etwa 10,83%.

b) $3\,600\,000 = K_0 \cdot 1{,}15^2 \Leftrightarrow K_0 = \dfrac{3\,600\,000}{1{,}15^2} = 2\,722\,117$

d.h. der Verkaufspreis darf hï¿½chstens 2 722 117 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 7:

a) 1. $r_J = 1\,500(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) = 18\,370{,}50$

$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{246\,000}{18\,370{,}50} \cdot 0{,}038]}{\ln 1{,}038} = 19{,}06448$$

d.h. neunzehn Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen.

2. $K_{19} = 246\,000 \cdot 1{,}038^{19} - 18\,370{,}5 \cdot \dfrac{1{,}038^{19} - 1}{0{,}038} = 1\,161{,}14$

d.h. die Restzahlung betrï¿½gt 1 161,14 Euro.

b) 1. $A = 246\,000 \cdot 1{,}038^{20} \cdot \dfrac{0{,}038}{1{,}038^{20} - 1} = 17\,782{,}00$

d.h. die Annuitï¿½ten betragen 17 782,00 Euro.

2. $K_6 = 246\,000 \cdot 1{,}038^{6} - 17\,782{,}00 \cdot \dfrac{1{,}038^{6} - 1}{0{,}038} = 190\,338$

$Z_7 = K_6 \cdot 0{,}038 = 7\,232{,}84$

$T_7 = A - Z_7 = 10\,549{,}16$

$K_7 = K_6 - T_7 = 179\,788{,}84$

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuitï¿½t a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
7	7 232,84	10 549,16	17 782,00	179 788,84

Lösung zu Aufgabe 8:

1. Lösungsweg:

Barwert der Ausgaben für die bestehende Anlage:

$$K_0 = \frac{180\,000}{1{,}05} + \frac{180\,000}{1{,}05^2} + \frac{180\,000}{1{,}05^3} + \frac{180\,000}{1{,}05^4} + \frac{180\,000}{1{,}05^5} = 180\,000 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 779\,305{,}8$$

Barwert der Ausgaben für die neue Anlage:

$$K_0 = \frac{66\,000}{1{,}05} + \frac{66\,000}{1{,}05^2} + \frac{66\,000 + 30\,000}{1{,}05^3} + \frac{66\,000}{1{,}05^4} + \frac{66\,000 - 40\,000}{1{,}05^5} + 450\,000 = 730\,319{,}5$$

d.h. der Barwert der Ausgaben für die bestehende Anlage ist um $779\,305{,}8 - 730\,319{,}5 = 48\,986{,}3$ Euro Höher, somit lohnt sich der Austausch der alten Anlage.

2. Lösungsweg:

Endwert der Ausgaben für die bestehende Anlage: 994 613,6 Euro

Endwert der Ausgaben für die neue Anlage: 932 093,4 Euro

d.h. der Endwert der Ausgaben für die bestehende Anlage ist Höher, somit lohnt sich der Austausch der alten Anlage.

3. Lösungsweg:

Jahr	Kosten (fixe plus variable)		Differenz
	alte Anlage	neue Anlage	(Periodenï¿½berschuss)
1	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
2	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
3	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
4	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
5	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000

$K_0 = \dfrac{114\,000}{1{,}05} + \dfrac{114\,000}{1{,}05^2} + \dfrac{114\,000 - 30\,000}{1{,}05^3} + \dfrac{114\,000}{1{,}05^4} + \dfrac{114\,000 + 40\,000}{1{,}05^5} - 450\,000 = 48\,986{,}26 > 0$

d.h. die Ersparnis wï¿½rde 48 986,26 Euro betragen; d.h. der Kauf der neuen Anlage lohnt sich.

Finanzmathematik-Klausur vom 11.07.2012

Aufgabe 4
Bei 4,2% Jahreszins bestehen die folgenden Zahlungsverpflichtungen:

- 10 000 Euro am 01.01.2013
- 20 000 Euro am 01.01.2017
- 15 000 Euro am 01.01.2018

Der Schuldner möchte seine Schulden zurï¿½ckzahlen durch

a) gleich hohe vorschï¿½ssige Quartalsraten. Die erste Quartalsrate ist fällig am 01.01.2013, die letzte Quartalsrate soll am 01.10.2018 gezahlt werden. Wie hoch sind die Quartalsraten?

b) gleich hohe vorschï¿½ssige Monatsraten ï¿½ber 1 000 Euro. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2013. Wie viele volle Monatsraten muss er zahlen?

c) drei gleich hohe Betrï¿½ge fällig am

   - 01.01.2013
   - 01.01.2017
   - 01.01.2019

   Wie hoch sind diese Rückzahlungsbetrï¿½ge?

Aufgabe 5
Eine Investition in Höhe von 32 220 Euro hätte eine Nutzungsdauer von fï¿½nf Jahren bei folgenden (Perioden-)ï¿½berschï¿½ssen:

1. Jahr 10 000 €
2. Jahr 10 000 €
3. Jahr 15 000 €
4. Jahr 3 000 €
5. Jahr 2 500 €

Die Geschï¿½ftsfï¿½hrung gibt einen (Erwartungs-)Zinsfuï¿½ von 10% p.a. vor. Wï¿½rden Sie als zustï¿½ndige/r Verantwortliche/r einen Investitionsantrag stellen; d.h. lohnt sich die Investition? (Begrï¿½ndung!)

Aufgabe 6

a) Ein Zeichnung von Picasso wurde im Jahr 1997 für 150 000 € erworben. Nach zehn Jahren (hier genau nach zehn Jahren) wurde diese Zeichnung für 1,2 Mio. € in London bei Christie's versteigert. Wie hoch war für den (ehemaligen) Besitzer nach Abzug von 15% als Vermittlungsgebï¿½hr für Christie's die jï¿½hrliche Rendite (der interne Zinsfuï¿½)?

b) Einem Mï¿½nzhï¿½ndler wird eine antike Mï¿½nze zum Kauf angeboten, die der Hï¿½ndler glaubt nach zwei Jahren für 75 € wieder verkaufen zu kï¿½nnen. Welchen Betrag darf er maximal für den Ankauf dieser Mï¿½nze aufwenden, wenn er eine Rendite (einen Zins) von mindestens 20% p.a. erzielen will?

Aufgabe 7
Ein Hï¿½ndler vereinbart mit seinem Kunden für einen Klavierkauf eine Ratenzahlung in Höhe von 200 Euro zahlbar zu Beginn eines Monats ï¿½ber fï¿½nf Jahre. Die erste Monatsrate ist fällig sofort bei Kauf.

a) Die Konkurrenz bietet für das gleiche Klavier einen Ratenkauf an mit vorschï¿½ssigen Quartalsraten in Höhe von 740 Euro ï¿½ber vier Jahre, erste Rate fällig sofort bei Kauf. Welches der beiden Angebote ist gï¿½nstiger, wenn ein Jahreszins von 4% unterstellt wird? (Begrï¿½ndung!)

b) Der Kunde möchte das Angebot seines Hï¿½ndlers annehmen, jedoch schon binnen drei (statt fï¿½nf) Jahren das Klavier durch vorschï¿½ssige Monatsraten abbezahlen. Wie hoch wï¿½ren vorschï¿½ssige Monatsraten ï¿½ber drei Jahre, wenn wiederum ein Jahreszins von 4% unterstellt wird?

c) Wie hoch wï¿½ren in einem ï¿½quivalenten Finanzierungsmodell zwei gleich hohe Raten, erste Rate fällig bei Kauf, zweite Rate fällig zwei Jahre nach Kauf, wenn wiederum ein Jahreszins von 4% unterstellt wird?

Aufgabe 8
Die Geschï¿½ftsfï¿½hrung möchte gerne anlï¿½sslich des Vorhabens, in zwei Jahren neue Investoren zu ï¿½berzeugen, sich an dem Unternehmen zu beteiligen, bestehende Kredit-Schulden abbauen. Es soll geprï¿½ft werden, ob finanziell eine ï¿½nderung der Rückzahlung von drei bestehenden Krediten durch einen einmaligen Betrag möglich ist.

Die Gelegenheit dazu bietet sich Ende 2013, weil dann dem Unternehmen aus einer fürher getï¿½tigten (Geld-)Anlage von damaligen Gewinnen ein hoher Betrag zur Verfügung stehen wird.

Das Unternehmen hatte nï¿½mlich mit (Zins-)Wirkung ab dem 02.09.2010 eine Summe von 800 000 € zu folgenden Zins-Konditionen (relativ gemischte Verzinsung) angelegt:

- in 2010 mit 4% p.a.

- in 2011 mit 3% p.a. und
- in 2012 und 2013 mit 2% p.a.

a) Diese Finanzanlage kann am Ende des Jahres 2013 aufgelï¿½st werden (2013 zï¿½hlt noch als ganzes Zinsjahr), um die Rückzahlung der Kredite durchfï¿½hren zu kï¿½nnen. Welcher Betrag wï¿½rde dann Ende 2013 ans Unternehmen ausgezahlt werden?

b) Sie werden gebeten zu ermitteln, durch welchen einmaligen Betrag Ende 2013 drei bisher vereinbarte KreditRückzahlungen ersetzt werden kï¿½nnten, und ob der dann aus der (Geld-)Anlage zur Verfügung stehende Betrag dazu ausreicht.

   Ersetzt werden sollen die drei folgenden Zahlungen (Zinsfuï¿½ 5% p.a., relativ gemischte Verzinsung, Bewertungsstichtag 31.12.2013) von

   - 200 000 € genau Jahresmitte 2013
   - 300 000 € Ende 2013
   - 400 000 € Ende 2016

Lösung zu Aufgabe 4:

Barwert der Schulden am 01.01.2013: $K_0 = 10\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}042^4} + \dfrac{15\,000}{1{,}042^5} = 39\,176{,}25$

a) Die Laufzeit der vorschï¿½ssigen Quartalsrente betrï¿½gt genau sechs Jahre.
   Nachschï¿½ssige jï¿½hrliche Ersatzrente r_J:
   $39\,176{,}25 = r_J \cdot \dfrac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^6} \Rightarrow r_J = 7\,522{,}065$
   Vorschï¿½ssige Quartalsraten r'_Q:
   $7\,522{,}065 = r'_Q \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}042\right) \Rightarrow r'_Q = 1\,832{,}42$
   d.h. die Quartalsraten betragen 1 832,42 Euro.
   2. Lösungsweg:
   $r'_Q = 39\,176{,}25 \cdot 1{,}042^6 \cdot \dfrac{0{,}042}{(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) \cdot (1{,}042^6 - 1)} = 1\,832{,}42$

b) Nachschï¿½ssige jï¿½hrliche Ersatzrente r_J:
   $r_J = 1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,273$
   Laufzeit n in Jahren:
   $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{39\,176{,}25}{12\,273} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 3{,}498803$
   3,498803 Jahre $= 3{,}498803 \cdot 12 = 41{,}98564$ Monate
   d.h. es sind 41 volle Monatsbetrï¿½ge zu zahlen.

c) $39\,176{,}25 = x + \dfrac{x}{1{,}042^4} + \dfrac{x}{1{,}042^6} = 2{,}629517 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{39\,176{,}25}{2{,}629517} = 14\,898{,}65$
   d.h. die drei gleich hohen Rückzahlungen betragen 14 898,65 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

$K_0 = \frac{10\,000}{1{,}1} + \frac{10\,000}{1{,}1^2} + \frac{15\,000}{1{,}1^3} + \frac{3\,000}{1{,}1^4} + \frac{2\,500}{1{,}1^5} - 32\,220 = 6{,}437588 > 0$
d.h. mathematisch betrachtet lohnt sich die Investition, weil der Kapitalwert positiv ist. Wirtschaftlich betrachtet sollten jedoch bei einem Plus von 6 Euro andere Gri¿½nde für oder gegen die Investition herangezogen werden.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $1\,200\,000 \cdot 0{,}85 = 1\,020\,000$

$0 = \frac{1\,020\,000}{q^{10}} - 150\,000 \Leftrightarrow q = \sqrt[10]{\frac{1\,020\,000}{150\,000}} = 1{,}211298$
d.h. der interne Zins betri¿½gt etwa 21,1%.

b) $75 = K_0 \cdot 1{,}2^2 \Leftrightarrow K_0 = \frac{75}{1{,}2^2} = 52{,}08333$
d.h. der Verkaufspreis darf hi¿½chstens etwa 52,08 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 7:

a) $R_0' = 200(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5} = 10\,915{,}87$

$R_0' = 740(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^4} = 11\,013{,}10$
d.h. gemessen am Barwert ist das Hi¿½ndler-Angebot gi¿½nstiger.

b) $10\,915{,}87 = r_J \cdot \frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^3} \Leftrightarrow r_J = 3\,933{,}518$
$3\,933{,}518 = r_M' \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r_M' = 320{,}8416$
d.h. die Monatsraten wi¿½rden 320,84 Euro betragen.

c) $10\,915{,}87 = x + \frac{x}{1{,}04^2} \Leftrightarrow x = 5\,671{,}889$
d.h. die beiden Zahlungen mi¿½ssten 5 671,89 Euro betragen.

Lösung zu Aufgabe 8:

a) $K_{3+\frac{29+30+30+30}{360}} = 800\,000 \cdot \left(1 + \frac{119}{360} \cdot 0{,}04\right) \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02^2 = 868\,624{,}87$
d.h. es werden 868 624,87 € ausgezahlt.

b) $200\,000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) + 300\,000 + \frac{400\,000}{1{,}05^3} = 850\,535{,}04 < 868\,624{,}87$
d.h. die Einmalzahlung wi¿½rde 850 535,04 € betragen und die Auszahlung aus a) wi¿½rde reichen.

Finanzmathematik-Klausur vom 01.02.2012

Aufgabe 4
Ein Darlehn in Höhe von 300 000 € wird von einer Bank zu folgenden Konditionen zur Verfügung gestellt:

Auszahlung:	100%
Kreditzins:	5% p.a.
Tilgung:	3% Tilgungssatz im ersten Jahr

Die Rückzahlung soll in gleich hohen Annuitï¿½ten erfolgen, erste Annuitï¿½t fällig ein Jahr nach Kreditauszahlung.

a) Wie viele volle Annuitï¿½ten sind zu zahlen?

b) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das siebte Tilgungsjahr an.

c) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuitï¿½t?

Aufgabe 5
Der Autohï¿½ndler A bietet bei 2,9 % Jahreszins für einen Ratenkauf eines VW Golf Plus das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung in Höhe von 1 600 Euro, fällig sofort
- vorschï¿½ssige Monatsraten in Höhe von 300 Euro ï¿½ber vier Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
- Restzahlung (Schlussrate) nach vier Jahren in Höhe von 6 000 Euro

a) Wie hoch mï¿½sste der Verkaufspreis bei einem Barkauf mindestens sein, damit das Finanzierungsmodell gï¿½nstiger wï¿½re?

b) Der Autohï¿½ndler B bietet für den gleichen Wagen ebenfalls bei 2,9 % Jahreszins das folgende Finanzierungsmodell an:

   - Anzahlung ï¿½ber 4 000 Euro
   - Quartalsraten ï¿½ber fï¿½nf Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
   - Restzahlung (Schlussrate) in Höhe von 5 000 Euro nach fï¿½nf Jahren.

   Wie hoch mï¿½ssen die Quartalsraten bemessen sein, damit die Finanzierungsmodelle der beiden Hï¿½ndler gleichwertig sind; d.h. die selben Barwerte haben?

Aufgabe 6
Bei einer Geschï¿½ftsbank wurde am 31.03.2011 ein Kredit ï¿½ber 50 000 € zu einem nominellen Jahreszins von 3,1% bei vierteljï¿½hrlicher Verzinsung zum relativen Zins aufgenommen. Der Kredit soll am 31.12.2015 zurï¿½ckgezahlt werden.

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins? (Geben Sie bitte den Effektivzins in Prozent mit vier Nachkommastellen an.)

b) Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag am 31.12.2015?

c) Nach wie vielen vollen Quartalen übersteigt die Schuld erstmals den Betrag von 55 000 €?

d) Angenommen vorzeitig werden 20 000 € am 31.03.2013 und 10 000 € am 31.12.2013 zurï¿½ckgezahlt. Wie hoch ist dann die Restzahlung am 31.12.2015?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $A = 300\,000 \cdot (0{,}05 + 0{,}03) = 24\,000$

$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{300\,000}{24\,000} \cdot 0{,}05]}{\ln 1{,}05} = 20{,}1$$

d.h. es sind 20 volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

b) $K_6 = 300\,000 \cdot 1{,}05^6 - 24\,000 \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 238\,782{,}78$

$Z_7 = K_6 \cdot 0{,}05 = 11\,939{,}14$

$T_7 = A - Z_7 = 12\,060{,}86$

$K_7 = K_6 - T_7 = 226\,721{,}92$

c) $K_{20} = 300\,000 \cdot 1{,}05^{20} - 24\,000 \cdot \dfrac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = 2\,406{,}41$

$K_{20} \cdot 1{,}05 = 2\,526{,}73$

d.h. die Restschuld betrï¿½gt 2 526,73 €.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $r_J = 300(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}029) = 3\,656{,}55$

$$R_0 = 3\,656{,}55 \cdot \frac{1{,}029^4 - 1}{0{,}029} \cdot \frac{1}{1{,}029^4} = 13\,624{,}32$$

$$K_0 = 1\,600 + 13\,624{,}32 + \frac{6\,000}{1{,}029^4} = 20\,576{,}00$$

d.h. der Verkaufspreis mï¿½sste ï¿½ber 20 576 Euro liegen, damit das Finanzierungsmodell gï¿½nstiger wï¿½re.

b) $R_0 = 20\,576 - 4\,000 - \dfrac{5\,000}{1{,}029^5} = 12\,241{,}96$

$$12\,241{,}96 = r_J \cdot \frac{1{,}029^5 - 1}{0{,}029} \cdot \frac{1}{1{,}029^5} \Leftrightarrow r_J = 2\,665{,}46$$

$2\,665{,}46 = r'_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}029) \Leftrightarrow r'_Q = 654{,}50$

d.h. die Quartalsraten mï¿½ssen 654,50 Euro betragen.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $j = \left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}031362$

d.h. der effektive Jahreszins beträgt 3,1362%.

b) Laufzeit:

2011	3 Quartale
2012	4 Quartale
2013	4 Quartale
2014	4 Quartale
2015	4 Quartale
$\sum$	19 Quartale = 4,75 Jahre

$$K_{4{,}75} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}031}{4}\right)^{4 \cdot 4{,}75} = 57\,899{,}30$$

d.h. es sind 57 899,30 € zurückzuzahlen.

c) $$n = \frac{\ln(55\,000 \div 50\,000)}{\ln 1{,}031362} = 3{,}086420$$

d.h. nach dreizehn vollen Quartalen wird erstmals der Betrag von 55 000 € überschritten.

d) Die Rückzahlung über 20 000 € wird elf Quartale vor der Restzahlung und die Rückzahlung über 10 000 € wird acht Quartale vor der Restzahlung getätigt.

$$57\,899{,}30 - 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}031}{4}\right)^{11} - 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}031}{4}\right)^{8} = 25\,489{,}59$$

d.h. er muss 25 489,59 € zurückzahlen.

Finanzmathematik-Klausur vom 26.09.2011

Aufgabe 4
Herr F. hat zu Beginn des Jahres 2003 einen Kredit über 30 000 € zu 6,5% Zinseszinsen p.a. aufgenommen, den er mit vorschüssigen Monatsraten in Höhe von 184,93 € zurückzahlt.

a) Wie hoch wäre bei jährlichen statt monatlichen Zahlungen die Annuität?

b) Wie viele volle Annuitï¿½ten sind zu zahlen?

c) Anfang Januar 2011 erbt Herr F. überraschend 27 000 €. Wie lautet die Tilgungsplan-Zeile für das Jahr 2010? Und könnte Herr F. mit der Erbschaft auf einen Schlag seine Restschuld Anfang Januar 2011 zurückzahlen?

Aufgabe 5
Für einen Hauskauf wird bei 4% Jahreszinsen eine Hypothek in Höhe von 250 000 € aufgenommen. Die Schuld soll zurückgezahlt werden durch

a) Annuitätentilgung über zwanzig Jahre, wobei die erste Annuität fällig ist ein Jahr nach Kapitalaufnahme. Wie hoch sind die Annuitäten?

b) Annuitäten in Höhe von 15 000 €, wobei die erste Annuität fällig ist ein Jahr nach Kapitalaufnahme. Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) drei gleich hohe Beträge nach fünf bzw. nach zehn bzw. nach zwölf Jahren. Wie hoch sind die Beträge bei 4% Jahreszinsen?

Aufgabe 6
Ein Unternehmen finanziert eine Erweiterungsinvestition mit einem Kredit, dessen Zinssatz flexibel vereinbart wird, d.h. der Zinssatz wird monatlich ï¿½berprï¿½ft und je nach Entwicklung der Kapitalmï¿½rkte angepasst. Die Laufzeit des Kredits betrï¿½gt drei Jahre. Die Verzinsung wird als monatliche Verzinsnung zum relativen Zins vereinbart. Die Aufgenommene Schuld und die aufgelaufenen Zinsen werden am Ende der Laufzeit komplett zurï¿½ckgezahlt. Zusammengefasst ergibt sich:

Auszahlung der Kreditsumme: 01.09.2011
Auszahlungsbetrag: 1 000 000 €
Anfï¿½nglicher Zinssatz: 4,92% p.a.
Monatliche Zahlung: 0 €
Tilgung der Schuld: 31.08.2014
Zahlung der aufgelaufenen Zinsen: 31.08.2014

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen an die Bank am 31.08.2014 zu zahlen hat, wenn sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.09.2011 bis 31.08.2014 nicht ï¿½ndert? Am Ende welchen Monats ï¿½bersteigt die Schuld erstmalig den Wert von 1 150 000 €?

b) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen an die Bank am 31.08.2014 zu zahlen hat, wenn sich der flexible Zinssatz zum 01.01.2013 auf 5,04% p.a. und zum 01.12.2013 auf 5,28% p.a. erhï¿½ht? Am Ende welchen Monats ï¿½bersteigt die Schuld erstmalig den Wert von 1 150 000 €?

c) Das Unternehmen geht davon aus, dass der flexible Zinssatz erstmalig zum 01.01.2013 auf 5,04% p.a. steigt. Mit einer zweiten Erhï¿½hung rechnet es am 01.12.2013. Wie hoch darf diese zweite Erhï¿½hung maximal sein, damit die Zahlung des Unternehmens an die Bank zum 31.08.2014 den Betrag 1 165 000 € nicht ï¿½bersteigt?

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r_{\text{jährlich}} = 184{,}93\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) = 2\,297{,}29$
d.h. die Annuitäten betragen 2 297,29 €.

b) $\dfrac{R_0}{r_j} = \dfrac{30\,000}{2\,297{,}29} = 13{,}0588$
$n = -\dfrac{\ln[1 - 13{,}0588 \cdot 0{,}065]}{\ln 1{,}065} = 30{,}0012$
d.h. es sind 30 volle Annuitäten zu zahlen.

c) 2010 $\widehat{=}$ 8. Jahr

$$\begin{aligned} K_7 &= 30\,000 \cdot 1{,}065^7 - 2\,297{,}29 \cdot \tfrac{1{,}065^7 - 1}{0{,}065} = 27\,040{,}09 \\ Z_8 &= K_7 \cdot 0{,}065 = 1\,757{,}61 \\ T_8 &= A - Z_8 \\ K_8 &= K_7 - T_8 \end{aligned}$$

Jahr	Zinsen a.E.d.J	Tilgung a.E.d.J	Annuität a.E.d.J	Restschuld a.E.d.J
8	1 757,61	539,67	2 297,29	26 500,40

d.h. Herr F. könnte Anfang 2011 mit der Erbschaft von 27 000 € seine Restschuld von 26 500,40 € begleichen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $A = 250\,000 \cdot 1{,}04^{20} \cdot \dfrac{0{,}04}{1{,}04^{20} - 1} = 18\,395{,}44$
d.h. die Annuitäten betragen 18 395,44 €.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{250\,000}{15\,000} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 28{,}01102$
d.h. es sind 28 volle Annuitäten zu leisten.
$K_{28} = 250\,000 \cdot 1{,}04^{28} - 15\,000 \cdot \dfrac{1{,}04^{28} - 1}{0{,}04} = 162{,}0851$
$K_{28} \cdot q = 168{,}5685$
d.h. die Restzahlung beträgt 168,57 €.

c) $250\,000 = \dfrac{x}{1{,}04^5} + \dfrac{x}{1{,}04^{10}} + \dfrac{x}{1{,}04^{12}} \Leftrightarrow 250\,000 = 2{,}122088x \Leftrightarrow x = 117\,808{,}5$

d.h. die Zahlungen betragen jeweils 117 808,5 €.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $K_3 = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{3 \cdot 12} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}0041^{36} = 1\,158\,699{,}49$

d.h. die Rï¿½ckzahlsumme am 31.08.2014 beträgt 1 158 699,49 €.

$j = \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}05032476$

$n = \dfrac{\ln \frac{1\,150\,000}{1\,000\,000}}{\ln 1{,}05032476} = 2{,}846509$

$0{,}846509 \cdot 12 = 10{,}15811$ Monate

d.h. nach zwei Jahren und elf Monaten wird am 01.08.2014 erstmals der Betrag von 1 150 000 € ï¿½berschritten.

b) $K_3 = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{16} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0504}{12}\right)^{11} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0528}{12}\right)^{9} = 1\,163\,092{,}34$

d.h. die Rï¿½ckzahlsumme am 31.08.2014 beträgt 1 163 092,34 €.

$K_{\frac{27}{12}} = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{16} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0504}{12}\right)^{11} = 1\,118\,031{,}04$

$j = \left(1 + \dfrac{0{,}0528}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}054097$

$n = \dfrac{\ln \frac{1\,150\,000}{1\,118\,031{,}04}}{\ln 1{,}054097} = 0{,}5351285$

$0{,}5351285 \cdot 12 = 6{,}421542$ Monate

d.h. nach $16 + 11 + 7 = 34$ Monaten wird am 01.07.2014 erstmals der Betrag von 1 150 000 € ï¿½berschritten.

c)
$$
\begin{array}{rcll}
1\,165\,000 &=& 1\,118\,031{,}04 \cdot \left(1 + \dfrac{i}{12}\right)^{9} & \mid \div 1\,118\,031{,}04 \\
1.042010 &=& \left(1 + \dfrac{i}{12}\right)^{9} & \mid \text{9. Wurzel} \\
1{,}004583 &=& 1 + \dfrac{i}{12} & \mid -1 \\
0{,}004583 &=& \dfrac{i}{12} & \mid \cdot 12 \\
i &=& 0{,}0549949 &
\end{array}
$$

d.h. der Jahreszins darf maximal 5,49949% betragen.

Finanzmathematik-Klausur vom 14.07.2011

Aufgabe 4
Herr E. möchte seine Rente, die ihm durch vierzehn vorschüssige Jahresbeträge von 17 200 € zukommen soll, in eine nachschüssige Jahresrente über elf Jahre umwandeln. Die Zinsen betragen 5% p.a.

a) Wie hoch ist der Barwert der 14-jährigen vorschüssigen Rente?

b) Wie hoch sind die neuen Jahresauszahlungen?

c) Wie hoch wären monatlich vorschüssig ausgezahlte Beträge über diese elf Jahre?

d) Welchen Betrag könnte Herr E. sofort abheben, wenn die zu Beginn eines jeden Monats fälligen Beträge über diese elf Jahre nur 1 600 € betragen sollen?

Aufgabe 5
Für den Kauf eines Kleinwagens besteht zu 4% Zinsen p.a. das folgende Finanzierungsmodell

- Sofortzahlung von 8 000 €
- vorschüssige Quartalsraten in Höhe von 250 € über drei Jahre, erste Rate sofort fällig
- Restzahlung in Höhe von 3 000 € nach Ablauf von drei Jahren

a) Wie hoch muss bei 4% Zinsen p.a. der Kaufpreis des Wagens sein, damit das Finanzierungsmodell günstiger ist als der Barkauf?

b) Wie hoch wären statt der Quartalsraten vorschüssige Monatsraten zu 4% Jahreszins über drei Jahre?

c) Der Käufer entscheidet sich für das Finanzierungsmodell. Unvorhergesehen möchte der Käufer zu Beginn des dritten Jahres nach Erwerb des Pkw seine noch ausstehenden Schulden mit einer Einmalzahlung vorzeitig zurückzahlen. Wie hoch ist diese Zahlung zu Beginn des dritten Jahres, wenn die Zinsen weiterhin 4% p.a. betragen?

Aufgabe 6
Ein Bauherr finanziert einen Teil einer neuen Immobilie - im Folgenden Immobilie 1 genannt - mit einem Kredit, der mit dem Verkaufserlï¿½s einer anderen Immobilie - im Folgenden Immobilie 2 genannt - getilgt werden soll. Da er zum Zeitpunkt des Kaufs der Immobilie 1 noch nicht weiï¿½, wann die Immobilie 2 verkauft werden wird, vereinbart er mit seiner Bank einen Kredit mit einer maximalen Laufzeit von einem Jahr und einem flexiblen Zinssatz, der je nach Entwicklung der Kapitalmï¿½rkte jeden Monat angepasst werden muss. Die Zinsen werden monatlich nachschï¿½ssig an die Bank gezahlt. Zusammengefasst ergibt sich:

Auszahlung der Kreditsumme: 01.06.2011
Auszahlungsbetrag: 100 000 €
Anfï¿½nglicher Zinssatz: 4,32 % p.a.
Zinszahlung: monatlich nachschüssig
Tilgung: Bei Verkauf der Immobilie 1, spï¿½testens am 31.05.2012

a) Wie hoch sind die monatlichen Zinszahlungen, wenn sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 nicht ï¿½ndert und der Kredit erst am 31.05.2012 getilgt wird? Wie hoch ist dann die Summe aller Zinszahlungen?

b) Wie hoch ist die Summe aller Zinszahlungen, wenn sich der flexible Zinssatz zum 01.01.2012 auf 4,56% p.a. und zum 01.04.2012 auf 4,92% p.a. erhï¿½ht und der Kredit erst am 31.05.2012 getilgt wird?

Der Bauherr erhï¿½lt für die Immobilie 2 am 01.12.2011 die folgenden beiden Angebote:

Angebot 1:
Verkauf der Immobilie und Zahlung des Kaufpreises: 31.01.2012
Kaufpreis: 100 000 €

Angebot 2:
Verkauf der Immobilie und Zahlung des Kaufpreises: 31.05.2012
Kaufpreis: 101 500 €

Somit kï¿½nnte der Bauherr bei Annahme von Angebot 1 den Kredit zum 31.01.2012 und bei Annahme von Angebot 2 zum 31.05.2012 tilgen.

c) Für welches Angebot sollte sich der Bauherr entscheiden, wenn er davon ausgeht, dass sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 nicht ï¿½ndert? Nehmen Sie dazu an, dass bei Annahme von Angebot 1 die im Zeitraum 01.02.2012 bis 31.05.2012 gesparten Zinszahlungen an die Bank zu einem Jahreszins von 2% angelegt werden kï¿½nnen.

d) Für welches Angbot sollte sich der Bauherr entscheiden, wenn er davon ausgeht, dass sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 gemï¿½ï¿½ Aufgabenteil b) verändert? Nehmen Sie dazu an, dass bei Annahme von Angebot 1 die im Zeitraum 01.02.2012 bis 31.05.2012 gesparten Zinszahlungen an die Bank zu einem Jahreszins von 2% angelegt werden kï¿½nnen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $R_0 = 17\,200 \cdot 1{,}05 \cdot \dfrac{1{,}05^{14} - 1}{0{,}05} \cdot \dfrac{1}{1{,}05^{14}} = 178\,769{,}46$

b)
$$\begin{aligned} 178\,769{,}46 &= r_J \cdot \tfrac{1{,}05^{11}-1}{0{,}05} \cdot \tfrac{1}{1{,}05^{11}} \\ 178\,769{,}46 &= r_J \cdot 8{,}3064 \\ r_J &= 21\,521{,}86 \end{aligned}$$

c) $21\,521{,}86 = r'_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 12{,}325 r'_M \Rightarrow r'_M = 1\,746{,}20$

d) $r_J = 1\,600(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 19\,720$
$R_0 = 19\,720 \cdot \frac{1{,}05^{11}-1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^{11}} = 163\,802{,}49$

$$\begin{array}{r} 178\,769{,}46 \\ -163\,802{,}49 \\ \hline 14\,966{,}97 \end{array}$$

d.h. Herr E. könnte sofort 14 966,97 € von seinem Konto abheben.

Lösung zu Aufgabe 5:
$r_J = 250 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 1\,025$

a) $K_0 = 8\,000 + 1\,025 \cdot \dfrac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{104^3} + \dfrac{3\,000}{1{,}04^3} = 13\,511{,}46$
d.h. der Kaufpreis muss mindestens 13 511,47 € betragen.

b) $1\,025 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r'_M = 83{,}60522$
d.h. die Monatsraten müssten 83,61 € betragen.

c) $\dfrac{1\,025}{1{,}04} + \dfrac{3\,000}{1{,}04} = 3\,870{,}19$
d.h. der Käufer muss 3 870,19 € bezahlen, um den Vertrag ein Jahr früher zu beenden.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Bemessungsgrundlage für die einfachen Zinsen Z eines Monats $n = \frac{1}{12}$ ist das Startkapital $K_0 = 100\,000$:
$Z = K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot \frac{1}{12} \cdot i = 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}0432 = 360$
$12 \cdot Z = 12 \cdot 360 = 4\,320$
d.h. die einfachen monatlichen Zinsen betragen 360 € und die Summe aller Zinszahlungen beträgt 4 320 €.

b) $7 \cdot 360 + 3 \cdot 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}0456 + 2 \cdot 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}0492 = 4\,480$
d.h. die Summe aller Zinszahlungen beträgt 4 480 €.

c) Gesparte Zinszahlungen von Angebot 1 im Zeitraum 01.02. bis 31.05.2012:
$$360 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}02\right) + 360 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}02\right) + 360 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}02\right) + 360 = 1\,443{,}6$$
d.h. die gesparten Zinszahlungen von Angebot 1 betragen 1 443,6 €. Durch die höhere Kaufsumme von Angebot 2 ergibt sich ein Plus von 1 500 €.
$1\,500 > 1\,443{,}6$; d.h. Angebot 2 ist günstiger.

d) $100\,000 \cdot \dfrac{0{,}0456}{12} = 380$ und $100\,000 \cdot \dfrac{0{,}0492}{12} = 410$
Ersparte Zinszahlungen von Angebot 1:
$$380 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}02\right) + 380 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}02\right) + 410 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}02\right) + 410 = 1\,583{,}85$$
Damit sind die ersparten Zinszahlungen von Angebot 2 höher als die Differenz von 1 500 der beiden unterschiedlichen Kaufpreise, somit ist Angebot 1 günstiger.

Finanzmathematik-Klausur vom 31.01.2011

Aufgabe 4
Für einen Hauskauf wird ein Kredit ï¿½ber 200 000 Euro aufgenommen.

a) Der Kredit soll bei 4,8% Jahreszinsen zurï¿½ckgezahlt werden durch Annuitï¿½ten jeweils am Ende eines Jahres in Höhe von 14 000 Euro. Die erste Annuitï¿½t ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme. Wie viele volle Annuitï¿½ten sind zu leisten?

b) Der Kredit soll binnen zwanzig Jahren zurï¿½ckgezahlt werden. Die Rückzahlung erfolgt durch gleich hohe Annuitï¿½ten jeweils am Ende eines Jahres. Die erste Annuitï¿½t ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme. Wie hoch sind bei einem Jahreszins von 4,8% die Annuitï¿½ten?

Aufgabe 5
Der Betrag von 1 000 Euro wird zwï¿½lf Jahre lang zu einem nominellen Jahreszins von 1,2 % auf einem Konto angelegt.

a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende der Laufzeit bei

   1. einfacher Verzinsung?
   2. jï¿½hrlich nachschï¿½ssiger Verzinsung mit Zinseszins?
   3. vierteljï¿½hrlicher Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zins?

b) Wie hoch ist in den zwï¿½lf Jahren der effektive Jahreszins (d.h. der Jahreszins, der nach zwï¿½lf Jahren zu nachschï¿½ssiger Verzinsung mit Zinseszins zum selben Guthaben fï¿½hren wï¿½rde) bei

   1. einfacher Verzinsung?
   2. jï¿½hrlich nachschï¿½ssiger Verzinsung mit Zinseszins?
   3. vierteljï¿½hrlicher Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zins?

c) Die ursprï¿½nglich geplante Laufzeit von zwï¿½lf Jahren wird verkï¿½rzt. Wann betrï¿½gt der Kontostand erstmals mindestens 1 100 Euro bei

   1. einfacher Verzinsung?
   2. jï¿½hrlich nachschï¿½ssiger Verzinsung mit Zinseszins?
   3. vierteljï¿½hrlicher Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zins?

Aufgabe 6
Ein Bauherr möchte eine Immobilie ï¿½ber einen Kredit finanzieren. Seine Hausbank unterbreitet ihm die beiden folgenden Angebote.

Angebot 1:
Auszahlungsbetrag: 300 000 Euro
Zinssatz: 3,25% p.a.

Zinsbindungsdauer: 10 Jahre
Tilgungs- und Zinszahlung: monatlich nachschï¿½ssig 1 200 Euro
Weitere Kosten: 0 Euro

Angebot 2:
Auszahlungsbetrag: 300 000 Euro
Zinssatz: 3,75% p.a.
Zinsbindungsdauer: 15 Jahre
Tilgungs- und Zinszahlung: monatlich nachschï¿½ssig 1 200 Euro
Weitere Kosten: 0 Euro

a) Um welchen Betrag ï¿½bersteigt die Restschuld nach zehn Jahren bei Angebot 2 die Restschuld nach zehn Jahren bei Angebot 1?

b) Der Bauherr geht davon aus, dass in der Zukunft die Zinsen für Baukredite steigen werden. Er rechnet damit, dass er bei der Entscheidung für Angebot 1 nach Ablauf der Zinsbindungsfrist von zehn Jahren von seiner Bank folgendes Angebot zur Fortfï¿½hrung des Kredits unterbreitet bekommt:

   KreditHöhe: Restschuld von Angebot 1 nach 10 Jahren
   Zinssatz: 5,5% p.a.
   Zinsbindungsdauer: 5 Jahre
   Tilgungs- und Zinszahlung: monatlich nachschï¿½ssig 1 200 Euro
   Weitere Kosten: 0 Euro

   Soll sich der Bauherr unter dieser Annahme für das Angebot 1 oder das Angebot 2 entscheiden?
   Beantworten Sie diese Frage, indem Sie f ï¿½r beide Angebote die Restschuld nach 15 Jahren berechnen und die Ergebnisse vergleichen.

c) Der Bauherr rechnet damit, dass er nach fï¿½nf Jahren bei beiden Angeboten eine Sondertilgung in Höhe von 40 000 Euro leisten kann. Wie fï¿½llt jetzt in b) Ihre Empfehlung aus?

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{14\,000} \cdot 0{,}048\right]}{\ln 1{,}048} = 24{,}7$
   d.h. es sind vierundzwanzig volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

b) $A = \dfrac{200\,000 \cdot 1{,}048^{20} \cdot 0{,}048}{1{,}048^{20} - 1} = 15\,777{,}49$
   d.h. die Annuitï¿½ten betragen 15 777,49 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) 1. $K_{12} = 1\,000 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}012) = 1\,144$
d.h. das Guthaben nach zwï¿½lf Jahren betrï¿½gt 1 144 Euro.

2. $K_{12} = 1\,000 \cdot 1{,}012^{12} = 1\,153{,}895$
d.h. das Guthaben nach zwï¿½lf Jahren betrï¿½gt 1 153,90 Euro.

3. $K_{12} = 1\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}012}{4}\right)^{48} = 1\,154{,}635$
d.h. das Guthaben nach zwï¿½lf Jahren betrï¿½gt 1 154,64 Euro.

b) 1. $\sqrt[12]{\dfrac{1\,144}{1\,000}} = 1{,}011274$
d.h. der Effektivzins betrï¿½gt 1,1274 %.

2. Der Effektivzins betrï¿½gt 1,2 %.

3. *1. Lösungsweg:*
$\sqrt[12]{\dfrac{1\,154{,}635}{1\,000}} = 1{,}012054$
d.h. der Effektivzins betrï¿½gt 1,2054 %.
2. Lösungsweg:
$j = \left(1 + \dfrac{0{,}012}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}012054 \widehat{=} 1{,}2054\%$

c) 1.
$$\begin{array}{rcll} 1\,100 & = & 1\,000 \cdot (1 + n \cdot 0{,}012) & \mid \div 1\,000 \\ 1{,}1 & = & 1 + n \cdot 0{,}012 & \mid -1 \\ 0{,}1 & = & n \cdot 0{,}012 & \mid \div 0{,}012 \\ 8{,}\overline{3} & = & n & \end{array}$$
$0{,}\overline{3} \cdot 360 = 120$
d.h. nach acht Jahren und 120 Tagen wird erstmals der Kontostand von 1 100 Euro erreicht.

2. $n = \dfrac{\ln\left(\frac{1\,100}{1\,000}\right)}{\ln(1{,}012)} = 7{,}990075$
d.h. nach acht Jahren wird erstmals der Kontostand von 1 100 Euro ï¿½berschritten.

3. $n = \dfrac{\ln\left(\frac{1\,100}{1\,000}\right)}{\ln(1{,}012054)} = 7{,}954431$
d.h. nach acht Jahren wird erstmals der Kontostand von 1 100 Euro ï¿½berschritten.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Angebot 1:

$$K_{10} = 300\,000 \cdot 1{,}0325^{10} - 1\,200 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) \cdot \frac{1{,}0325^{10} - 1}{0{,}0325} = 243\,587{,}62$$

Angebot 2:

$$K_{10} = 300\,000 \cdot 1{,}0375^{10} - 1\,200 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0375) \cdot \frac{1{,}0375^{10} - 1}{0{,}0375} = 259\,679{,}02$$

$259\,679{,}02 - 243\,587{,}62 = 16\,091{,}40$

d.h. nach zehn Jahren ï¿½bersteigt die Restschuld von Angebot 2 die Restschuld von Angebot 1 um 16 091,40 Euro.

b) Angebot 1:

$$K_{15} = 243\,587{,}62 \cdot 1{,}055^5 - 1\,200 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}055) \cdot \frac{1{,}055^5 - 1}{0{,}055} = 235\,965{,}63$$

Angebot 2:

$$K_{15} = 300\,000 \cdot 1{,}0375^{15} - 1\,200 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0375) \cdot \frac{1{,}0375^{15} - 1}{0{,}0375} = 233\,219{,}91$$

d.h. Angebot 2 ist gï¿½nstiger.

c) Angebot 1:

$235\,965{,}63 - 40\,000 \cdot 1{,}0325^5 \cdot 1{,}055^5 = 174\,621{,}56$

Angebot 2:

$233\,219{,}91 - 40\,000 \cdot 1{,}0375^{10} = 175\,418{,}16$

d.h. Angebot 1 ist gï¿½nstiger.

Finanzmathematik-Klausur vom 04.10.2010

Aufgabe 4
Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen:	100 000 €	
Verzinsung:	Monatliche Verzinsung zum relativen Zins	
Auszahlung:	Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.	
Zinskonditionen:	1. Jahr:	2% p.a.
	2. bis 5. Jahr:	3% p.a.
	6. bis 10. Jahr:	4% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende des wie vielten Monats ï¿½bersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 110 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinssatz fï¿½hrt nach zehn Jahren bei jï¿½hrlicher nachschï¿½ssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a)?

Aufgabe 5
Bei 4,8% Jahreszins wird für einen Hauskauf am 01.01.2010 ein Kredit in Höhe von 150 000 Euro aufgenommen. Als Rückzahlung wird Annuitï¿½tentilgung ï¿½ber 20 Jahre vereinbart, erste Annuitï¿½t ist fällig am 31.12.2010. In den ersten fï¿½nfzehn Jahren betragen die Annuitï¿½ten jeweils 10 000 Euro.

a) Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2024?

b) Wie hoch mï¿½ssen die Annuitï¿½ten in den letzten fï¿½nf Jahren der Annuitï¿½tentilgung sein, damit der Kredit nach 20 Jahren abgezahlt ist?

c) Wie hoch ist der 20. Tilgungsbetrag?

Aufgabe 6
Eine Privatperson möchte einen Betrag von 10 000 € für vier Jahre anlegen. Sie erhï¿½lt von ihrer Bank die folgenden beiden Angebote:

> Angebot 1:
> Der Betrag wird zu jï¿½hrlich nachschï¿½ssigen Zinseszinsen angelegt. Die Bank gewï¿½hrt im ersten Jahr 0,7% Zinsen, im zweiten 1,5% Zinsen und im dritten und vierten Jahr jeweils 2% Zinsen.

Angebot 2:
Die Bank legt den Betrag extern (bei einer Lebensversicherung) an. Die Privatperson erhï¿½lt nach vier Jahren einen Betrag von 10 358 € zurï¿½ck. Alternativ kann eine lebenslï¿½ngliche jï¿½hrlich vorschï¿½ssige Rente in Höhe von 640,92 € gewï¿½hlt werden, erste Rentenauszahlung ist fällig genau vier Jahre nach der Anlage.

a) Welches Kapital ergibt sich nach vier Jahren bei Angebot 1?

b) Welcher gleichbleibende Zinssatz wï¿½re in Angebot 1 bei jï¿½hrlicher nachschï¿½ssiger Verzinsung anzusetzen, damit ebenfalls das unter a) berechnete Kapital nach vier Jahren erreicht wird?

c) Welcher gleichbleibende Zinssatz wï¿½re bei jï¿½hrlicher nachschï¿½ssiger Verzinsung anzusetzen, damit der eingezahlte Betrag wie in Angebot 2 nach vier Jahren auf 10 358 € anwachsen kann?

d) Wie lange muss bei Angebot 2 die Privatperson den Zeitpunkt der Geldanlage ï¿½berleben, damit sich die Wahl der lebenslï¿½nglichen jï¿½hrlich vorschï¿½ssigen Rente lohnt?
Verwenden Sie als Rechnungszins 2,25% p.a. (derzeitiger Mindestzins bei Abschluss einer Lebensversicherung).

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12} = 102\,018{,}44$

$K_5 = 102\,018{,}44 \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{48} = 115\,008{,}24$

$K_{10} = 115\,008{,}24 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{60} = 140\,424{,}67$

d.h. der Betrag liegt bei 140 424,67 Euro.

2. Lösungsweg:

$$K_{10} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{48} \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{60} = 140\,424{,}67$$

b) nachschï¿½ssiger Ersatzzins $j = \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}030416$

$n = \dfrac{\ln\left(\frac{110\,000}{102\,018{,}44}\right)}{\ln 1{,}0030416} = 2{,}51403$ Jahre

$0{,}51403 \cdot 12 = 6{,}16836$ Monate

1 Jahr plus 2 Jahre plus 7 Monate = 43 Monate

d.h. nach 43 Monaten.

2. Lösungsweg:

$$
\begin{aligned}
102\,018{,}44 \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^x &= 110\,000 && \mid \div 102\,018{,}44 \\
1{,}0025^x &= 1{,}078236 && \mid \ln \\
x &= \frac{\ln 1{,}078236}{\ln 1{,}0025} = 30{,}1682 \approx 31 \text{ Monate}
\end{aligned}
$$

31 Monate plus 12 Monate = 43 Monate

c) $q = \sqrt[10]{\frac{140\,424{,}67}{100\,000}} = 1{,}034533$
   d.h. der gesuchte Zins betrï¿½gt etwa 3,45%.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_{15} = 150\,000 \cdot 1{,}048^{15} - 10\,000 \cdot \frac{1{,}048^{15}-1}{0{,}048} = 90\,481{,}58$
   d.h. die Restschuld nach 15 Jahren betrï¿½gt 90 481,58 Euro.

b) $90\,481{,}58 = A \cdot \frac{1{,}048^5-1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} \Rightarrow A = 20\,783{,}56$
   d.h. die restlichen Annuitï¿½ten betragen jeweils 20 783,56 Euro.

c) 1. Lösungsweg:
   $T_{16} = 20\,783{,}56 - 90\,481{,}58 \cdot 0{,}048 = 16\,440{,}44$
   $T_{20} = T_{16} \cdot 1{,}048^4 = 19\,831{,}64$
   d.h. der letzte Tilgungsbetrag betrï¿½gt 19 831,64 Euro.
   2. Lösungsweg:
   $T_{20} = K_{19} = 90\,481{,}58 \cdot 1{,}048^4 - 20\,783{,}56 \cdot \frac{1{,}048^4-1}{0{,}048} = 19\,831{,}64$
   3. Lösungsweg:
   $K_{19} = 90\,481{,}58 \cdot 1{,}048^4 - 20\,783{,}56 \cdot \frac{1{,}048^4-1}{0{,}048} = 19\,831{,}64$
   $Z_{20} = K_{19} \cdot 0{,}048 = 951{,}92$
   $T_{20} = A - Z_{20} = 20\,783{,}56 - 951{,}92 = 19\,831{,}64$

Lösung zu Aufgabe 6

a) $K_4 = 10\,000 \cdot 1{,}007 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02^2 = 10\,633{,}98$
   d.h. das Kapital nach vier Jahren betrï¿½gt 10 633,98 €.

b) $q = \sqrt[4]{\frac{10\,633{,}98}{10\,000}} = 1{,}0155$
   d.h. der gesuchte Jahreszins betrï¿½gt 1,55 %.

c) $q = \sqrt[4]{\frac{10\,358}{10\,000}} = 1{,}0088$
   d.h. der gesuchte Jahreszins betrï¿½gt 0,88 %.

d) $n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{10\,358}{640{,}92 \cdot 1{,}0225} \cdot 0{,}0225\right]}{\ln 1{,}0225} = 19{,}75$
   d.h. die Rente sollte mindestens 20-mal bezogen werden. Da die erste Rente erst

vier Jahre nach der Anlage und jede Rente - also auch die letzte Rente - zu Beginn eines Jahres ausgezahlt wird, muss die Privatperson den Zeitpunkt der Anlage um mindestens $4 + 20 - 1 = 23$ Jahre ï¿½berleben.

Finanzmathematik-Klausur vom 07.07.2010

Aufgabe 4
Für den Erwerb eines Pkw stehen zwei verschiedene Finanzierungsmodelle zur Auswahl:

a) **Modell A**

- 5 000 Euro Sofortzahlung
- drei Jahre lang vorschï¿½ssige Monatsraten in Höhe von 300 Euro, erste Monatsrate ist fällig bei der Sofortzahlung
- am Ende des 3. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 4 200 Euro

Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells A bei 12,1 % Jahreszinsen?

b) **Modell B**

- 3 000 Euro Sofortzahlung
- vier Jahre lang vorschï¿½ssige Quartalsraten in Höhe von 750 Euro, erste Quartalsrate ist fällig bei der Sofortzahlung
- am Ende des 4. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 8 000 Euro

Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells B bei 12,1 % Jahreszinsen?

c) Welches der beiden Modelle A oder B ist bei 12,1% Jahreszinsen vorteilhafter? (Begrï¿½ndung!)

d) Der Interessent entscheidet sich für das Modell B. Für die Restzahlung aus dem Modell B nach vier Jahren in Höhe von 8 000 Euro möchte er von Anfang an vier Jahre lang am Ende eines jeden Monats Geld ansparen. Wie viel Euro muss er bei 1,8 % Jahreszinsen monatlich einzahlen, um die Restzahlung davon begleichen zu kï¿½nnen?

Aufgabe 5
Einem Unternehmen werden zur Finanzierung einer Investition von seiner Hausbank die folgenden beiden Kreditangebote mit unterschiedlichen Laufzeiten unterbreitet:

Angebot 1: Kreditvolumen: 100 000 € Relativ gemischte Verzinsung bei einem Zins von 4,20% p.a. Monatlich nachschï¿½ssiger zu zahlender Betrag an die Bank: 600 €

Angebot 2: Kreditvolumen: 100 000 € Relativ gemischte Verzinsung bei einem Zins von 3,67% p.a. Monatlich nachschï¿½ssiger zu zahlender Betrag an die Bank: 600 €

a) Wie groß ist bei Angebot 1 die nach zehn Jahren verbleibende Restschuld?

b) Wie groß ist bei Angebot 2 die nach fï¿½nf Jahren verbleibende Restschuld?

c) Wie hoch mï¿½sste in Angebot 1 der monatlich nachschï¿½ssig an die Bank zu zahlende Betrag sein, damit der Kredit nach zehn Jahren zurï¿½ckgezahlt ist?

Aufgabe 6

Bei 4,3% Jahreszins wird am 01.01.2010 für einen Hauskauf ein Kredit ï¿½ber 200 000 Euro aufgenommen. Als Rückzahlung wird Ratentilgung vereinbart ï¿½ber 25 Jahre, von denen die ersten fï¿½nf Jahre jedoch tilgungsfrei sind.

a) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für die Jahre 2013 und 2029 an.

b) Unerwartet kï¿½nnen am 31.12.2019 neben der Annuitï¿½t noch 30 000 Euro zurï¿½ckgezahlt werden.

   1. Auf welchen Betrag reduzieren sich die Tilgungsbetrï¿½ge in den nachfolgenden Jahren?
   2. Und wie hoch ist die Annuitï¿½t am 31.12.2020?
   3. Es soll nur noch in den geraden Jahreszahlen 2020, 2022, 2024 usw. getilgt werden, die anfallenden Zinsen werden jedoch jedes Jahr gezahlt. Wie hoch sind dann die Tilgungsbetrï¿½ge in den Jahren 2020, 2022, 2024, ...?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 5000 + 300(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}121) \cdot \frac{1{,}121^3 - 1}{0{,}121} \cdot \frac{1}{1{,}121^3} + \frac{4200}{1{,}121^3} = 17\,178{,}98$
d.h. der Barwert des Modells A betrï¿½gt 17 178,98 Euro.

b) $K_0 = 3000 + 750(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}121) \cdot \frac{1{,}121^4 - 1}{0{,}121} \cdot \frac{1}{1{,}121^4} + \frac{8000}{1{,}121^4} = 17\,846{,}57$
d.h. der Barwert des Modells B betrï¿½gt 17 846,57 Euro.

c) Der Barwert des Modells A ist kleiner als der Barwert von Modell B. Somit ist Modell A für den Interessenten vorteilhafter.

d) $8000 = r_J \cdot \frac{1{,}018^4 - 1}{0{,}018} \Rightarrow r_J = 1\,946{,}80$
$1\,946{,}80 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}018) \Rightarrow r_M = 160{,}91$
d.h. der Interessent muss monatlich 160,91 Euro nachschï¿½ssig einzuzahlen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $r_J = 600 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}042) = 7\,338{,}60$
$K_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}042^{10} - 7\,338{,}60 \cdot \frac{1{,}042^{10} - 1}{0{,}042} = 61\,966{,}28$
d.h. die Restschuld nach 10 Jahren betrï¿½gt 61 966,28 €.

b) $r_J = 600 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0367) = 7\,321{,}11$
$K_5 = 100\,000 \cdot 1{,}0367^5 - 7\,321{,}11 \cdot \frac{1{,}0367^5 - 1}{0{,}0367} = 80\,354{,}41$
d.h. die Restschuld nach fï¿½nf Jahren betrï¿½gt 80 354,41 €.

c) $100\,000 = r_j \cdot \frac{1{,}042^{10}-1}{0{,}042} \cdot \frac{1}{1{,}042^{10}} \Rightarrow r_J = 12\,452{,}15$
$12\,452{,}15 = r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}042) \Rightarrow r_M = 1\,018{,}08$
d.h. die Monatsrente betrï¿½gt 1 018,08 €

Lösung zu Aufgabe 6:

a)

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuitï¿½t a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
4	8 600	-	8 600	200 000
20	2 580	10 000	12 580	50 000

$T = \frac{200\,000}{20} = 10\,000$
$K_{19} = 200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$
$Z_{20} = K_{19} \cdot 0{,}043 = 2\,580$
$K_{20} = K_{19} - 10\,000 = 50\,000$

b) 2019 = 5. Tilgungsjahr
Restschuld am 31.12.2019: $K_{10} = 200\,000 - 5 \cdot 10\,000 = 150\,000$

$$\begin{array}{r} 150\,000 \\ -30\,000 \\ \hline 120\,000 \end{array}$$

1. $T = \frac{120\,000}{15} = 8\,000$
   d.h. die Tilgungsbetrï¿½ge ab dem Jahr 2020 betragen 8 000 Euro.
2. $120\,000 \cdot 0{,}043 + 8\,000 = 5\,160 + 8\,000 = 13\,160$
   d.h. die gesuchte Annuitï¿½t betrï¿½gt 13 160 Euro.
3. 2020,2022,2024 …, 2034 = 8 Tilgungsjahre
   $T = \frac{120\,000}{8} = 15\,000$
   d.h. die Tilgung betrï¿½gt 15 000 Euro.

Finanzmathematik-Klausur vom 02.02.2010

Aufgabe 4
Eine Person spart vier Jahre monatlich nachschï¿½ssig 400 EUR auf einem Konto an. Die Bank gewï¿½hrt einen Jahreszins von 3,8%.

a) Welchen Betrag hat die Person nach vier Jahren auf ihrem Konto?

b) Welchen Betrag kann die Person fï¿½nf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschï¿½ssig von dem Konto abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

c) Welchen Betrag kann die Person fï¿½nf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschï¿½ssig von dem Konto abheben, wenn sie zusï¿½tzlich zwei Jahre nach Ende der Ansparphase 5 000 EUR für eine Sonderanschaffung abhebt? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

d) Wie lange kann die Person (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschï¿½ssig 606,06 EUR abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

Aufgabe 5
Für einen Hauskauf wird am 31.12.2010 ein Kredit in Höhe von 180 000 Euro zu einem Jahreszins von 4,2% aufgenommen. In den Jahren 2011, 2012, 2013 und 2014 werden lediglich die anfallenenden Zinsen bezahlt. Für die Rückzahlung stehen zwei Modelle zur Verfügung:

a) 1. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit einer Ratentilgung ï¿½ber 15 Jahre zurï¿½ckgezahlt. Berechnen Sie den jï¿½hrlichen Tilgungsbetrag am Ende des Jahres 2015.

b) 2. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit nachschï¿½ssigen Prozentannuitï¿½ten in Höhe von 10% der aufgenommenen Schuld zurï¿½ckgezahlt.

   1. Berechnen Sie die Prozentannuitï¿½t.
   2. Wie viele volle Prozentannuitï¿½ten sind zu leisten?
   3. Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuitï¿½t?
   4. Berechnen Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuitï¿½t, Restschuld) für das Jahr 2024.

Aufgabe 6
Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €
Verzinsung: jï¿½hrlich vorschï¿½ssige Verzinsung mit Zinseszins
Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.

Zinskonditionen:	1. Jahr:	5% p.a.
	2. bis 5. Jahr:	6% p.a.
	6. bis 10. Jahr:	7% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende welchen Jahres ï¿½bersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 165 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinsssatz fï¿½hrt nach zehn Jahren bei jï¿½hrlicher nachschï¿½ssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?

d) Das Unternehmen möchte das Angebot annehmen. Es besteht jedoch auf einer ï¿½nderung der Zinssï¿½tze im ersten und zehnten Jahr. Wie hoch sind diese beiden Zinssï¿½tze, wenn der in a) berechnete Betrag ausgegezahlt werden soll und der Zinssatz im zehnten Jahr doppelt so hoch sein soll wie im ersten Jahr?

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $r_J = 400\,(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}038) = 4\,883{,}60$

$$R_4 = 4\,833{,}60 \cdot \frac{1{,}038^4 - 1}{0{,}038} = 20\,676{,}34$$

d.h. das Guthaben betrï¿½gt 20 676,34 EUR.

b) $20\,676{,}34 = r_J \cdot \dfrac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 4\,618{,}403$

$4\,618{,}403 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 377{,}1048$

d.h. die Monatsrente betrï¿½gt 377,10 EUR.

c) $20\,676{,}34 - \dfrac{5\,000}{1{,}038^2} = 16\,035{,}73$

$16\,035{,}73 = r_J \cdot \dfrac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 3\,581{,}846$

$3\,581{,}846 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 292{,}4672$

d.h. die Monatsrente betrï¿½gt 292,47 EUR.

d) $r_J = 606{,}06(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) = 7\,422{,}417$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{20\,676{,}34}{7\,422{,}417} \cdot 0{,}038\right]}{\ln 1{,}038} = 3{,}013977$$

d.h. drei Jahre lang kann die Monatsrente abgehoben werden.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $T = \dfrac{180\,000}{15} = 12\,000$

b) 1. $A = K_0 \cdot (i+t) = 180\,000 \cdot 0{,}10 = 18\,000$

2. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{180\,000}{18\,000} \cdot 0{,}042\right]}{\ln 1{,}042} = 13{,}24019$

d.h. es sind dreizehn volle Prozentannuitï¿½ten zu leisten.

3. $K_{13} = 180\,000 \cdot 1{,}042^{13} - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^{13}-1}{0{,}042} = 4\,214{,}248$

$4\,214{,}248 \cdot 1,042 = 4\,391{,}25$

d.h. die Restschuld betrï¿½gt 4 391,25 Euro.

4. $K_9 = 180\,000 \cdot 1{,}042^9 - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^9 - 1}{0{,}042} = 68\,606{,}10$

$Z_{10} = K_9 \cdot i = 2\,881{,}46$

$T_{10} = A - Z_{10} = 15\,118{,}54$

$K_{10} = K_9 - T_{10} = 53\,487{,}55$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $K_1 = \dfrac{100\,000}{0{,}95} = 105\,263{,}16$

$K_5 = \dfrac{105\,263{,}16}{0{,}94^4} = 134\,823{,}31$

$K_{10} = \dfrac{134\,823{,}31}{0{,}93^5} = 193\,798{,}42$

d.h. der Betrag liegt bei 193 798,42 Euro.

2. Lösungsweg:

$K_{10} = \dfrac{100\,000}{0{,}95 \cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^5} = 193\,798{,}42$

b) nachschï¿½ssiger Ersatzzins $i' = \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{0{,}07}{0{,}93} = 0{,}07526882$

$n = \dfrac{\ln\left(\frac{165\,000}{134\,823{,}31}\right)}{\ln 1{,}07526882} = 2{,}783222 \Rightarrow 5 + 2{,}783222 = 7{,}783222$

d.h. nach acht Jahren.

c) $q = \sqrt[10]{\dfrac{193\,798{,}42}{100\,000}} = 1{,}068403$

d.h. der gesuchte Zins betrï¿½gt etwa 6,84%.

d)
$$\begin{aligned}
\frac{100\,000}{(1-i)\cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^4 \cdot (1-2i)} &= 193\,798{,}42 \\
\frac{100\,000}{0{,}5840408 \cdot (1-i)(1-2i)} &= 193\,798{,}42 && \Big| \cdot \frac{(1-i)(1-2i)}{193\,798{,}42} \\
0{,}8835 &= (1-i)(1-2i) = 1 - 3i + 2i^2 && \mid \div 2 \\
0{,}44175 &= i^2 - 1{,}5i + 0{,}5 && \mid -0{,}44175 \\
0 &= i^2 - 1{,}5i + 0{,}05825 && \mid \text{pq-Formel} \\
i &= 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 - 0{,}05825} = 0{,}75 \pm 0{,}7101056 \\
i &= 0{,}03989437 \text{ oder } i = 1{,}460106
\end{aligned}$$

d.h der Zins für das erste Jahr betrï¿½gt 3,989% und für das zehnte Jahr

$2 \cdot 3{,}989 = 7{,}978\%$.

Finanzmathematik-Klausur vom 02.10.2009

Aufgabe 4
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie zu Beginn des Jahres 2010 einen Kredit ï¿½ber 150 000 Euro auf. Für die Rückzahlung wird eine Annuitï¿½tentilgung zu 4,2% Jahreszinsen vereinbart. Die erste Rückzahlung ist fällig am 31.12.2010 und hat einen Tilgungssatz von 1%.

a) Wie hoch sind die Annuitï¿½ten?

b) Wie oft sind volle Annuitï¿½ten zu zahlen?

c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuitï¿½t, Restschuld) für das 21. Jahr an.

d) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuitï¿½t?

Aufgabe 5
Bei 4,2% Jahreszins bestehen die folgenden Zahlungsverpflichtungen:

- 10 000 Euro am 01.01.2010
- 20 000 Euro am 01.01.2014
- 15 000 Euro am 01.01.2015

Der Schuldner möchte seine Schulden zurï¿½ckzahlen durch

a) gleich hohe vorschï¿½ssige Quartalsraten. Die erste Quartalsrate ist fällig am 01.01.2010, die letzte Quartalsrate soll am 01.10.2015 gezahlt werden. Wie hoch sind die Quartalsraten?

b) gleich hohe vorschï¿½ssige Monatsraten ï¿½ber 1 000 Euro. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2010. Wie viele volle Monatsraten muss er zahlen?

c) drei gleich hohe Betrï¿½ge fällig am

   - 01.01.2010
   - 01.01.2014
   - 01.01.2016

   Wie hoch sind diese Rückzahlungsbetrï¿½ge?

Aufgabe 6
Eine Person möchte sich durch monatlich nachschï¿½ssige Einzahlungen auf ein Sparkonto - Einzahlungszeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 - eine private Altersversorgung finanzieren. Das am 31.12.2029 angesparte Kapital soll 200 000 GE betragen. Gehen Sie bei allen nachfolgenden Berechnungen von einem Rechnungszins von 4 % p.a. aus.

a) Berechnen Sie die monatlichen Einzahlungen, wenn diese ï¿½ber den kompletten Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 konstant sind.

b) Vom 01.01.2010 bis 31.12.2019 sind die monatlichen Einzahlungen konstant. Am 01.01.2020 sollen die monatlichen Einzahlungen um 2% erhï¿½ht und dann bis 31.12.2029 die erhï¿½hten Betrï¿½ge eingezahlt werden. Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019 und wie hoch sind sie im Zeitraum 01.01.2020 bis 31.12.2029, damit die private Altersversorgung am 01.01.2030 ausfinanziert ist?

c) Vom 01.01.2010 bis 31.12.2019 betragen die monatlichen Einzahlungen 520 GE. Am 01.01.2020 sollen die monatlichen Einzahlungen erhï¿½ht und dann bis 31.12.2029 die erhï¿½hten Betrï¿½ge eingezahlt werden. Um wie viel Prozent mï¿½ssen die monatlichen Einzahlungen am 01.01.2020 erhï¿½ht werden, damit die private Altersversorgung am 01.01.2030 ausfinanziert ist?

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $A = (i + t) \cdot K_0 = (0{,}042 + 0{,}01) \cdot 150\,000 = 7\,800$
d.h. die Annuitï¿½ten betragen 7 800 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{150\,000}{7\,800} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 40{,}0725$
d.h. es sind 40 volle Annuitï¿½ten zu leisten.

c) $K_{20} = 150\,000 \cdot 1{,}042^{20} - 7\,800 \cdot \dfrac{1{,}042^{20} - 1}{0{,}042} = 104\,394{,}50$

$Z_{21} = K_{20} \cdot i$
$T_{21} = A - Z_{21}$
$K_{21} = K_{20} - T_{21}$

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuitï¿½t	Restschuld
21	4 384,57	3 415,43	7 800	100 979,00

d) $K_{40} = 150\,000 \cdot 1{,}042^{40} - 7\,800 \cdot \dfrac{1{,}042^{40} - 1}{0{,}042} = 552{,}77$
$552{,}77 \cdot 1{,}042 = 575{,}99$
d.h. die Zahlung betrï¿½gt 575,99 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

Barwert der Schulden am 01.01.2010: $K_0 = 10\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}042^4} + \dfrac{15\,000}{1{,}042^5} = 39\,176{,}25$

a) Die Laufzeit der vorschï¿½ssigen Quartalsrente betrï¿½gt genau sechs Jahre.
Nachschï¿½ssige jï¿½hrliche Ersatzrente r_J:
$39\,176{,}25 = r_J \cdot \dfrac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^6} \Rightarrow r_J = 7\,522{,}065$
Vorschï¿½ssige Quartalsraten r'_Q:
$7\,522{,}065 = r'_Q \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}042\right) \Rightarrow r'_Q = 1\,832{,}42$

d.h. die Quartalsraten betragen 1 832,42 Euro.

2. Lösungsweg:

$$r'_Q = 39\,176{,}25 \cdot 1{,}042^6 \cdot \frac{0{,}042}{(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) \cdot (1{,}042^6 - 1)} = 1\,832{,}42$$

b) Nachschï¿½ssige jï¿½hrliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,273$
Laufzeit n in Jahren:
$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{39\,176{,}25}{12\,273} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 3{,}498803$$
3,498803 Jahre = $3{,}498803 \cdot 12 = 41{,}98564$ Monate
d.h. es sind 41 volle Monatsbetrï¿½ge zu zahlen.

c) $$39\,176{,}25 = x + \frac{x}{1{,}042^4} + \frac{x}{1{,}042^6} = 2{,}629517 \cdot x \Rightarrow x = \frac{39\,176{,}25}{2{,}629517} = 14\,898{,}65$$
d.h. die drei gleich hohen Rückzahlungen betragen 14 898,65 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6

Der Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 betrï¿½gt 20 Jahre.

a) $$200\,000 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04} \Rightarrow r_M = 549{,}62$$
d.h. die monatlichen Einzahlungen betragen 549,62 GE.

b) Nachschï¿½ssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019:
$r_j = r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 12{,}22 \cdot r_M$
$$R_{10} = 12{,}22 \cdot r_M \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 146{,}7146 \cdot r_M$$
Nachschï¿½ssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2020 bis 31.12.2029:
$r_j = 1{,}02 \cdot r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 12{,}4644 \cdot r_M$
$$R_{10} = 12{,}4644 \cdot r_M \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 149{,}6489 \cdot r_M$$
Kontostand am 31.12.2029:
$200\,000 = 146{,}7146 \cdot 1{,}04^{10} \cdot r_M + 149{,}6489 \cdot r_M = 217{,}1735 \cdot r_M + 149{,}6489 \cdot r_M = 366{,}8224 \cdot r_M \Rightarrow r_M = 545{,}223$
$1{,}02 \cdot 545{,}223 = 556{,}1274$
d.h. vor der Erhï¿½hung betragen die Monatsraten 545,22 GE, und nach der Erhï¿½hung 556,13 GE.

c) Nachschï¿½ssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019:
$r_j = 520 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 6\,354{,}4$
$$R_{10} = 6\,354{,}4 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 76\,291{,}6$$
Kontostand am 31.12.2029:
$$200\,000 = 76\,291{,}6 \cdot 1{,}04^{10} + r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 112\,930{,}2 + 146{,}7146 \cdot r_M$$
$87\,069{,}78 = 146{,}7146 \cdot r_M \Rightarrow r_M = 593{,}4636$

$\frac{593,4636}{520} = 1,141276$
d.h. die Monatsrente von 520 GE ist um etwa 14,13 % zu erHöhen auf 593,46 GE.

Finanzmathematik-Klausur vom 16.07.2009

Aufgabe 4
Frau X. möchte bei 2% Jahreszinsen durch vorschï¿½ssig monatliche Einzahlungen auf einen Neuwagen ansparen. Der Neuwagen soll am 31.12.2012 zu einem Preis von 20 000 Euro erworben werden. Frau X. rechnet damit, für den Verkauf ihres Gebrauchtwagens ebenfalls am 31.12.2012 noch 5 200 Euro zu erhalten. Diese 5 200 Euro möchte sie vollstï¿½ndig für den Neuwagenkauf verwenden.

a) Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen, wenn die erste Einzahlung am 01.01.2010 erfolgen soll und die letzte monatliche Einzahlung am 01.12.2012?

b) Im Jahr 2010 zahlt Frau X. die in a) berechneten monatlichen Betrï¿½ge ein. Am 31.12.2010 muss sie jedoch unvorhergesehen 1 000 Euro aus dem bisher Ersparten abheben. Wie hoch mï¿½ssen in den beiden Jahren 2011 und 2012 ihre monatlichen Einzahlungen ausfallen?

c) In den beiden Jahren 2010 und 2011 zahlt Frau X. die in a) berechneten monatlichen Betrï¿½ge ein. Am 31.12.2011 gewinnt sie unverhofft 650 Euro im Lotto, die sie auf dieses Sparkonto einzahlt. Wie hoch mï¿½ssen im Jahr 2012 ihre monatlichen Einzahlungen sein?

Aufgabe 5
Bei relativ gemischter Verzinsung zu 4% pro Jahr besteht die folgende Zahlungsverpflichtung:

- 1 000 Euro am 31.03.2010
- 2 000 Euro am 31.08.2011
- 3 000 Euro am 31.12.2014

Die Schulden sollen zurï¿½ckgezahlt werden durch

a) eine einmalige Zahlung am 31.07.2009. Wie hoch ist die einmalige Rückzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

b) zwei gleich hohe Betrï¿½ge am 31.03.2010 und am 31.12.2014. Wie hoch sind die beiden Betrï¿½ge, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

c) eine Zahlung ï¿½ber 2 500 Euro am 31.05.2013 und eine Restzahlung am 31.12.2014. Wie hoch ist die Restzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

Aufgabe 6
Ein Handwerker A. hat seinen Betrieb aus Altersgrï¿½nden zum 01.01.2007 an einen jungen Nachfolger B. ï¿½bergeben. Für die ï¿½bergabe des gGeschï¿½fts wird eine Kaufpreis in Form einer monatlich nachschï¿½ssigen Rente in Höhe von 2 000 GE

geleistet. Die Rente beginnt mit der Januarzahlung für das Jahr 2007 und endet mit der Dezemberzahlung für das Jahr 2011. Gehen Sie bei allen nachfolgenden Berechnungen von einem Rechnungszins von 5% p.a. aus.

a) Wie hoch ist der Barwert der Rente?

b) Aufgrund der Wirtschaftskrise kann B. die Rentenzahlungen ab 01.01.2009 nicht mehr in voller Höhe leisten. Er schlï¿½gt A. die folgenden veränderten Zahlungsbedingungen vor. Anstelle der noch ausstehenden Rentenzahlungen soll eine wertgleiche, bis Ende 2014 laufende monatlich nachschï¿½ssige Rente gezahlt werden. Wie hoch sind diese monatlichen Zahlungen?

c) Aufgrund der Wirtschaftskrise kann B. die Rentenzahlungen ab 01.01.2009 nicht mehr in voller Höhe leisten. Er schlï¿½gt A. die folgenden veränderten Zahlungsbedingungen vor. Anstelle der noch ausstehenden Rentenzahlungen soll eine monatlich nachschï¿½ssige Rente wie folgt gezahlt werden:

   1. Monatliche Zahlungen bis Ende Dezember 2011
   2. Höhe der monatlichen Zahlungen im Jahr 2009: 1 900 GE
   3. Erhï¿½hung der monatlichen Zahlungen zum 01.01.2010 um $100 \cdot x\%$
   4. Nochmalige Erhï¿½hung der monatlichen Zahlungen zum 01.01.2011 um $100 \cdot x\%$

   Berechnen Sie den Prozentsatz x unter der Annahme, dass die ursprï¿½nglichen und die neuen Rentenzahlungen wertgleich sind.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $r'_M = 14\,800 \cdot \dfrac{0{,}02}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) \cdot (1{,}02^3 - 1)} = 398{,}68$
   d.h. sie muss drei Jahre lang vorschï¿½ssig monatlich 398,68 Euro einzahlen.

b) Kontostand nach einem Jahr:
   $398{,}68 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) - 1\,000 = 3\,835{,}99$
   Rentenendwert der anschlieï¿½enden 2-jï¿½hrigen Rente:
   $14\,800 - 3\,835{,}99 \cdot 1{,}02^2 = 10\,809{,}04$
   Anschlieï¿½ende monatliche Einzahlungen r'_M:
   $r'_M = 10\,809{,}04 \cdot \dfrac{0{,}02}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) \cdot (1{,}02^2 - 1)} = 441{,}14$
   d.h. in den beiden Jahren 2011 und 2012 muss sie vorschï¿½ssig monatlich 441,14 Euro einzahlen.

c) Kontostand nach zwei Jahren:
   $4\,835{,}99 \cdot 1{,}02 + 4\,835{,}99 + 650 = 10\,418{,}70$
   Rentenendwert der anschlieï¿½enden einjï¿½hrigen Rente:
   $14\,800 - 10\,418{,}70 \cdot 1{,}02 = 4\,172{,}93$
   Anschlieï¿½ende monatliche Einzahlungen r'_M:

$$r'_M = \frac{4\,172{,}04}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02)} = 344{,}02$$
d.h. im Jahr 2012 muss sie vorschï¿½ssig monatlich 344,02 Euro einzahlen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_0 = \dfrac{1\,000}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \dfrac{2\,000}{1{,}04^2 \cdot (1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}04)} + \dfrac{3\,000}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} = 5\,242{,}35$

d.h. die einmalige Rückzahlung betrï¿½gt 5 242,35 Euro.

b) $5\,242{,}35 = \dfrac{x}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \dfrac{x}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} \Rightarrow 5\,242{,}35 = 1{,}782479x \Rightarrow x = 2\,941{,}05$

d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2 941,05 Euro.

c)
$$\begin{aligned}
5\,242{,}35 &= \frac{2\,500}{1{,}04^3 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}04)} + \frac{x}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} \\
5\,242{,}35 &= = 2\,150{,}80 + 0{,}8084529x \\
3\,091{,}55 &= 0{,}8084529x \\
x &= 3\,824{,}03
\end{aligned}$$
d.h. die Restzahlung betrï¿½gt 3 824,03 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $r_j = 2000 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}05) = 24\,550$

$R_0 = 24\,550 \cdot \dfrac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} \cdot \dfrac{1}{1{,}05^5} = 106\,288{,}66$

d.h. der Barwert aller Zahlungen betrï¿½gt 106 288,66 GE.

b) Restschuld am 01.01.2009:

$K_2 = 106\,288{,}66 \cdot 1{,}05^2 - 24\,550 \cdot \dfrac{1{,}05^2 - 1}{0{,}05} = 66\,855{,}74$

Barwert der neuen monatlichen Rente r_M:

$66\,855{,}74 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}05) \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} \cdot \dfrac{1}{1{,}05^6} \Rightarrow r_M = 1\,073{,}06$

d.h. die monatlichen Zahlungen betragen 1 073,06 GE.

c) Restschuld am 01.01.2010:

$K_3 = 66\,855{,}74 \cdot 1{,}05 - 1\,900 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}05) = 46\,876{,}03$

Setze: $y = 1 + \dfrac{x}{100}$

Jï¿½hrliche nachsch. Ersatzrente im Jahr 2010:

$y \cdot 1\,900 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}05) = 23\,322{,}50y$

Jï¿½hrliche nachsch. Ersatzrente im Jahr 2011:

$y^2 \cdot 1\,900 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}05) = 23\,322{,}50y^2$

Restschuld am 01.01.2012:

$$
\begin{array}{rcll}
0 & = & 46\,876{,}03 \cdot 1{,}05^2 - 1{,}05 \cdot 23\,322{,}50y - 23\,322{,}50y^2 & \mid \div 23\,322{,}50 \\
0 & = & 2{,}215921 - 1{,}05y - y^2 & \mid \cdot(-1) \\
0 & = & y^2 + 1{,}05y - 2{,}215921 & \\
y & = & -0{,}525 \pm \sqrt{0{,}525^2 + 2{,}215921} & \\
y & = & 1{,}053463 \text{ oder } \underbrace{y = -2{,}103463}_{\notin \text{Def.bereich}} & \\
x & = & 5{,}3463\% &
\end{array}
$$

d.h. der gesuchte Prozentsatz betrï¿½gt 5,35%.

Finanzmathematik-Klausur vom 10.02.2009

Aufgabe 3

Jemand zahlt in den Jahren 2000 bis einschlieï¿½lich 2010 monatlich vorschï¿½ssig 200 € auf ein Konto ein bei einem Jahreszins von 4%. Am 31.12.2006 erfolgt eine zusï¿½tzliche Einzahlung in Höhe von 20 000 € .

a) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2010?

b) Ab dem 01.01.2011 werden zu Beginn eines jeden Monats 1 000 € abgehoben. In welchem Jahr erfolgt die letzte volle monatliche Abhebung?

c) Welcher Betrag kï¿½nnte aus dem angesparten Guthaben ab dem 01.01.2011 zehn Jahre lang am Ende eines Vierteljahres abgehoben werden?

d) Unerwartet wird am 01.01.2012 ein Betrag abgehoben, der die geplanten vierteljï¿½hrlichen Abhebungen aus c) von da an auf 1 200 € reduziert. Wie groß ist der entnommene Betrag?

Aufgabe 6

Für einen Hauskauf wird ein Kredit ï¿½ber 200 000 Euro aufgenommen.

a) Der Kredit soll bei 4,8% Jahreszinsen zurï¿½ckgezahlt werden durch Annuitï¿½ten jeweils am Ende eines Jahres in Höhe von 14 000 Euro. Die erste Annuitï¿½t ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme. Wie viele volle Annuitï¿½ten sind zu leisten?

b) Der Kredit soll binnen zwanzig Jahren zurï¿½ckgezahlt werden. Die Rückzahlung erfolgt durch gleich hohe Annuitï¿½ten jeweils am Ende eines Jahres. Die erste Annuitï¿½t ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme. Wie hoch sind bei einem Jahreszins von 4,8% die Annuitï¿½ten?

c) Der Kredit soll binnen zwanzig Jahren zurï¿½ckgezahlt werden. In den ersten zehn Jahren nach der Kreditaufnahme betrï¿½gt der Jahreszins 4,8%, danach steigt der Jahreszins auf 5,2%. Die Rückzahlung erfolgt durch

- zehn Annuitï¿½ten ï¿½ber 11 600 Euro zahlbar jeweils am Ende eines Jahres. Der erste Betrag ï¿½ber 11 600 ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme.
- sowie durch weitere gleich hohe Rückzahlungen jeweils am Ende eines Jahres, deren erster Betrag fällig ist elf Jahre nach Kreditaufnahme. Wie hoch sind diese weiteren jï¿½hrlichen Zahlungen?

Aufgabe 7

Eine Aktiengesellschaft nimmt zur Finanzierung einer neuen Produktionsstï¿½tte bei ihrer Hausbank einen Kredit in Höhe von 1 000 000 GE auf. Dieser Betrag wird am 01.04.2002 ausgezahlt. Die erste Rückzahlung in Höhe von 300 000 GE erfolgt am 01.07.2005 und die zweite Rï¿½ckzahlung in Höhe von 500 000 GE am 01.07.2007. Es wird ein jï¿½hrlicher Zins von 5% vereinbart. Den Berechnungen wird die relative gemischte Verzinsung zu Grunde gelegt.

a) Die letzte Rückzahlung soll am 01.07.2009 erfolgen. In welcher Höhe ist die Restzahlung zum 01.07.2009 zu leisten? Wï¿½hlen Sie als Bewertungsstichtag den 01.07.2009.

b) Die Aktiengesellschaft kommt aufgrund von Turbulenzen an den Kapitalmï¿½rkten zum Jahresende 2008 in ernsthafte finanzielle Schwierigkeiten. Zur Vermeidung der Zahlungsunfï¿½higkeit schlï¿½gt die Hausbank folgende Modalitï¿½ten vor:

   1. Die Hausbank verzichtet auf 30% der am 31.12.2008 bestehenden Schuld.
   2. Die restlichen 70% der am 31.12.2008 bestehenden Schuld werden in zwei gleich hohen Betrï¿½gen zum 30.09.2010 und 30.11.2010 zurï¿½ck gezahlt.

   Wie hoch sind die beiden gleich hohen zum 30.09.2010 und 30.11.2010 zu zahlenden Betrï¿½ge? Wï¿½hlen Sie als Bewertungsstichtag den 31.12.2008.

c) Der Finanzvorstand der Aktiengesellschaft freut sich, dass die Hausbank 30% der am 31.12.2008 bestehenden Schuld erlassen will. Die restlichen 70% der am 31.12.2008 bestehenden Schuld möchte der Finanzvorstand aber am 30.06.2010 mit einem Betrag in Höhe von 373 000 GE begleichen. Welchem jï¿½hrlichen Zinssatz entspricht dies für den Zeitraum 31.12.2008 bis 30.06.2010? Wï¿½hlen Sie als Bewertungsstichtag den 31.12.2008.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $200 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{11} - 1}{0{,}04} + 20\,000 \cdot 1{,}04^4 = 56\,465{,}70$
   d.h. das Guthaben betrï¿½gt 56 465,70 € .

b) $r_J = 1\,000 \cdot [12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 12\,260$
   $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{56\,465{,}70}{12\,260} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 5{,}19$
   d.h. im Jahr 2016 erfolgt die letzte volle monatliche Auszahlung.

c) $56\,465{,}70 \cdot 1{,}04^{10} = r_J \cdot \dfrac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \Rightarrow r_J = 6\,961{,}71$
   $6\,961{,}71 = r_Q(4 + 1{,}5 \cdot 0{,}04) \Rightarrow r_Q = 1\,714{,}71$
   d.h. die Quartalsraten betragen 1 714,71 € .

d) $56\,465{,}70 \cdot 1{,}04 - 6\,961{,}71 = 51\,762{,}62$
   $51\,762{,}62 - x = 1\,200(4 + 1{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^9 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^9} \Rightarrow x = 15\,537{,}68$
   d.h. es wurden 15 537,68 € entnommen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a)

x	p
0	20
40	0

d.h. $x \in [0; 40]$

b) $$\begin{aligned} G(x) &= 20x - 0{,}5x^2 - 9{,}5x^2 + 52x - 72 = -10x^2 + 72x - 72 \\ G'(x) &= -20x + 72 \\ G''(x) &= -20 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$0 = -20x + 72 \Leftrightarrow x = 3{,}6$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -20 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 3{,}6$ glob. Max
$G(3{,}6) = 57{,}6$ GE
$p(3{,}6) = 18{,}2$ GE

c) *1. Lösungsweg:*
$x(p) = ?$
$p = 20 - 0{,}5x \Rightarrow p + 0{,}5x = 20 \Rightarrow x = 40 - 2p$

$$\begin{aligned} K(p) &= 9{,}5(40-2p)^2 - 52(40-2p) + 72 \\ &= 15\,200 - 1\,520p + 38p^2 - 2\,080 + 104p + 72 \\ &= 38p^2 - 1\,416p + 13\,192 \\ K'(p) &= 76p - 1\,416 \\ K''(p) &= 76 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$0 = 76p - 1\,416 \Rightarrow p = 18{,}63$
Hinreichende Bedingung:
$K''(p) = 76 >_{\text{immer}} 0$; d.h. $p = 18{,}63$ glob. Min.
2. Lösungsweg:
Notwendige Bedingung:
$0 = K'(x) = 19x - 52 \Rightarrow x = 2{,}74 \Rightarrow p = 20 - 0{,}5 \cdot 2{,}74 = 18{,}63$
Hinreichende Bedingung:
$K''(x) = 19 >_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 2{,}74$ glob. Min
d.h. der Kosten-minimale Preis betrï¿½gt 18,63 GE

d)
1. $$\begin{aligned} G(x) &= -10x^2 + 72x - 72 - 10x = -10x^2 + 62x - 72 \\ G'(x) &= -20x + 62 \\ G''(x) &= -20 \end{aligned}$$
   Notwendige Bedingung:
   $0 = -20x + 62 \Leftrightarrow x = 3{,}1$
   Hinreichende Bedingung:
   $G''(x) = -20 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 3{,}1$ glob. Max
2. $p(3{,}1) = 20 - 0{,}5 \cdot 3{,}1 = 18{,}45$ Gewinn-maximaler Preis mit Steuer
   $p = 18{,}2$ GE Gewinn-maximaler Preis ohne Steuer aus b)
   Differenz $18{,}45 - 18{,}2 = 0{,}25$ GE

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{14\,000} \cdot 0{,}048\right]}{\ln 1{,}048} = 24{,}7$$
d.h. es sind vierundzwanzig volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

b) $A = \dfrac{200\,000 \cdot 1{,}048^{20} \cdot 0{,}048}{1{,}048^{20} - 1} = 15\,777{,}49$

d.h. die Annuitï¿½ten betragen 15 777,49 Euro.

c) $K_{10} = 200\,000 \cdot 1{,}048^{10} - 11\,600 \cdot \dfrac{1{,}048^{10} - 1}{0{,}048} = 175\,077{,}81$

$175\,077{,}81 \cdot 1{,}052^{10} = A \cdot \dfrac{1{,}052^{10} - 1}{0{,}052} \Rightarrow A = 22\,894{,}12$

d.h. die weiteren Jahreszahlungen betragen 22 894,12 Euro.

Lösung zu Aufgabe 7:

a) Schulden = Rückzahlungen

$1\,000\,000 \cdot 1{,}05^7 \cdot (1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}05) = 300\,000 \cdot 1{,}05^4 + 500\,000 \cdot 1{,}05^2 + x \Rightarrow x = 508\,787{,}30$

d.h. die dritte Rückzahlung betrï¿½gt 508 787,30 GE.

b) Schulden am 31.12.2008:

$1\,000\,000 \cdot 1{,}05^6 \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot 0{,}05) - 300\,000 \cdot 1{,}05^3 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05) - 500\,000 \cdot 1{,}05 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05) = 496\,254{,}54$

70% von $496\,254{,}54 = 347\,378{,}18$

$347\,378{,}18 = \dfrac{x}{1{,}05 \cdot (1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}05)} + \dfrac{x}{1{,}05 \cdot (1 + \frac{11}{12} \cdot 0{,}05)} = 1{,}8286x$

$\Rightarrow x = 189\,969{,}40$

d.h. die beiden Zahlungen betragen 189 969,40 GE.

c) Schulden = Rückzahlungen

$$
\begin{aligned}
347\,378{,}18 &= \frac{373\,000}{q \cdot (1 + 0{,}5 \cdot (q-1))} = \frac{373\,000}{0{,}5q^2 + 0{,}5q} \\
0{,}5q^2 + 0{,}5q &= \tfrac{373\,000}{347\,378{,}18} = 1{,}078 \\
q^2 + q - 2{,}1475 &= 0 \\
q &= -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2{,}1475} \\
q &= -0{,}5 \pm 1{,}5484 \\
q &= 1{,}0484 \text{ oder } \underbrace{q = 2{,}0484}_{\notin \text{Def.-bereich}}
\end{aligned}
$$

d.h. der Jahreszins betrï¿½gt 4,84%.

Finanzmathematik-Klausur vom 08.07.2008

Aufgabe 4
Für den Erwerb eines Pkw stehen zwei verschiedene Finanzierungsmodelle bei 5,2 % Jahreszinsen zur Auswahl:

a) Modell A

- 4 000 Euro Sofortzahlung
- zwei Jahre lang nachschï¿½ssige Quartalsraten in Höhe von 900 Euro
- am Ende des 2. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 3 000 Euro

Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells A?

b) Modell B

- 3 000 Euro Sofortzahlung
- drei Jahre lang monatlich vorschï¿½ssig 200 Euro
- am Ende des 3. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 4 000 Euro

Beurteilen Sie anhand der Berechnung des Barwerts des Finanzierungsmodells B, welches Modell vorteilhafter ist.

c) Der Interessent entscheidet sich für das Modell B. Für die Restzahlung aus dem Modell B nach drei Jahren in Höhe von 4 000 Euro möchte er von Anfang an drei Jahre lang am Ende eines jeden Monats Geld ansparen. Wie viel Euro muss er bei 5,2 % Jahreszinsen monatlich einzahlen, um die Restzahlung davon begleichen zu kï¿½nnen?

Aufgabe 6
Ein Sparer legt 20 000 Euro bei seiner Bank am 31.03.2006 an bei vierteljï¿½hrlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 4%. Im Laufe der Jahre kommt es zu folgenden Kapitalbewegungen:

- Einzahlung von 3 000 Euro am 01.01.2007
- Abhebung von 5 000 Euro am 30.09.2008
- Abhebung von 4 000 Euro am 01.04.2009
- Einzahlung von 2 000 Euro am 30.06.2010

a) Wie hoch ist die effektive Verzinsung, die der Sparer pro Jahr erhï¿½lt?

b) ï¿½ber welches Guthaben kï¿½nnte der Sparer am 31.12.2010 verfï¿½gen?

c) Am Ende welchen Quartals ï¿½bersteigt das Guthaben des Sparers zum ersten Mal den Betrag von 25 000 Euro?

Aufgabe 7
Eine mit 9% p.a. zu verzinsende Schuld in Höhe von 200 000 Euro soll vom Ende des ersten Jahres an durch jï¿½hrliche Zahlungen in Höhe von 20 000 Euro zurï¿½ck gezahlt werden.

a) Wie hoch ist der erste Tilgungssatz und wie hoch ist der erste Tilgungsbetrag?

b) Wie viele Annuitï¿½ten kï¿½nnen in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch wï¿½ren monatlich vorschï¿½ssige Rückzahlungensbetrï¿½ge bei nach wie vor 9% Jahreszinsen ausgefallen? (Erster monatlicher Rückzahlungsbetrag fällig bei Kreditaufnahme.)

d) Der Schuldner ist in der Lage, mit der 14. Annuitï¿½t noch zusï¿½tzlich 50 000 Euro zu ï¿½berweisen. Ferner steigt zu Beginn des 15. Jahres der Zins auf 10% p.a. Wie hoch werden die Annuitï¿½ten anschlieï¿½end sein, wenn die Restschuld mit fï¿½nf gleich hohen Annuitï¿½ten beglichen werden soll?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 4000 + 900(4 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}052) \cdot \frac{1{,}052^2 - 1}{0{,}052} \cdot \frac{1}{1{,}052^2} + \frac{3000}{1{,}052^2} = 13\,515{,}87$
d.h. der Barwert des Modells A betrï¿½gt 13,515,87 Euro.

b) $K_0 = 3000 + 200(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}052) \cdot \frac{1{,}052^3 - 1}{0{,}052} \cdot \frac{1}{1{,}052^3} + \frac{4000}{1{,}052^3} = 13\,130{,}46$
d.h. der Barwert des Modells B ist mit 13 130,46 Euro kleiner als der Barwert von Modell A. Somit ist Modell B vorteilhafter.

c) $4000 = r_J \cdot \frac{1{,}052^3 - 1}{0{,}052} \Rightarrow r_J = 1\,266{,}34$
$1\,266{,}34 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}052) \Rightarrow r_M = 103{,}07$
d.h. es sind monatlich nachschï¿½ssig 103,07 Euro einzuzahlen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^4 = 1{,}040604$
d.h. der Effektivzins betrï¿½gt 4,0604 % pro Jahr.

b) *1. Lösungsweg:*
$K_{4,75} = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4{,}75\cdot 4} + 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot 4} - 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{2{,}25\cdot 4} - 4\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{1{,}75\cdot 4} + 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{0{,}5\cdot 4} =$
$20\,000 \cdot 1{,}01^{19} + 3\,000 \cdot 1{,}01^{16} - 5\,000 \cdot 1{,}01^{9} - 4\,000 \cdot 1{,}01^{7} + 2\,000 \cdot 1{,}01^{2} = 19\,963{,}15$
d.h. das Guthaben am 31.12.2010 betrï¿½gt 19 963,15 Euro.
2. Lösungsweg:
$K_{4,75} = 20\,000 \cdot 1{,}040604^{4{,}75} + 3\,000 \cdot 1{,}040604^{4} - 5\,000 \cdot 1{,}040604^{2{,}25} - 4\,000 \cdot$

$1{,}040604^{1{,}75} + 2\,000 \cdot 1{,}040604^{0{,}5} = 19\,963{,}15$

c) Guthaben am 31.12.2006: $20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{0{,}75 \cdot 4} = 20\,606{,}02$

Guthaben am 01.01.2007: $20\,606{,}02 + 3\,000 = 23\,606{,}02$

$n = \dfrac{\ln \frac{25\,000}{23\,606{,}02}}{\ln 1{,}040604} = 1{,}441511$ Jahre und $1{,}441511 \cdot 4 = 5{,}8$ Quartale

31.12.2006 plus sechs Quartale = 30.06.2008
d.h. am 30.06.2008 ï¿½bersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 25 000 Euro

Probe:
$20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^9 + 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^6 = 25\,058{,}27$

Lösung zu Aufgabe 7

a) $\dfrac{20\,000}{200\,000} = 0{,}1 = 10\%$ Prozentannuitï¿½t
$10\% - 9\% = 1\%$
$200\,000 \cdot 0{,}01 = 2\,000$
d.h. der erste Tilgungssatz betrï¿½gt 1%, die erste Tilgungsrate betrï¿½gt 2 000 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{20\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln(1{,}09)} = 26{,}7$
d.h. es sind 26 volle Annuitï¿½ten zu zahlen.

c) $20\,000 = r'_M(12 + \dfrac{13}{2} \cdot 0{,}09) \Rightarrow r'_M = 1\,589{,}19$
d.h. monatlich vorschï¿½ssige Raten betragen 1 589,19 Euro.

d) $K_{14} = 200\,000 \cdot 1{,}09^{14} - 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}09^{14} - 1}{0{,}09} = 147\,961{,}62$
$147\,961{,}62 - 50\,000 = 97\,961{,}62$
$A = 97\,961{,}62 \cdot 1{,}1^5 \cdot \dfrac{0{,}1}{1{,}1^5 - 1} = 25\,842{,}03$
d.h. die Annuitï¿½ten betragen 25 842,03 Euro.

Finanzmathematik-Klausur vom 08.02.2008

Aufgabe 4
Auf ein Konto erfolgte am 31.12.2007 bei 4% Jahreszins eine Einzahlung, so dass in den Jahren 2010 bis 2020 (einschließlich) vierteljährlich vorschüssig 2 000 Euro abgehoben werden können.

a) Wie hoch war die Einzahlung am 31.12.2007?

b) Unerwartet müssen am 31.12.2015 von diesem Konto 20 000 Euro abgehoben werden. Dafür entfallen die vierteljährlichen vorschüssigen Entnahmen im Jahr 2015. Wie hoch fallen jetzt die vierteljährlichen vorschüssigen Entnahmen in den Jahren 2016 bis 2020 (einschließlich) aus?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 2000(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{11} - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{13}} = 66\,416{,}34$
d.h. die Einzahlung betrug 66 416,34 Euro.

b) $R_0 = 66\,416{,}34 \cdot 1{,}04^8 - 2000(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot 1{,}04 - 20\,000 = 90\,895{,}35 - 46\,190{,}4 - 20\,000 = 24\,704{,}95$

$$24\,704{,}95 = r_J \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5} \Rightarrow r_J = \frac{24\,704{,}95}{4{,}451822} = 5\,549{,}402$$

$$5\,549{,}402 = r_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \Rightarrow r_Q = \frac{5\,509{,}402}{4{,}1} = 1\,353{,}513$$

d.h. die Entnahmen betragen 1 353,51 Euro.

Aufgabe 6
Ein Schuldner hat bei relativer gemischter Verzinsung mit 6% Jahreszinsen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 40 000 € am 31.03.2008
- 60 000 € am 31.12.2010
- 20 000 € am 31.12.2011

Statt diesen Zahlungsverpflichtungen möchte der Schuldner

a) seine Schuld mit einer einmaligen Zahlung am 01.01.2008 zurückzahlen. Wie hoch ist der einmalige Rückzahlungsbetrag? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

b) 20 000 € am 01.01.2008 zurückzahlen und nach vier Jahren die verbleibende Restschuld. Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag nach vier Jahren? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

c) die gesamte Schuld in drei gleich großen Beträgen am 01.01.2009, am 30.06.2010 und am 01.04.2011 zurückzahlen. Wie hoch werden diese Rückzahlungsbeträge sein? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $$\frac{40\,000}{1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06}+\frac{60\,000}{1{,}06^3}+\frac{20\,000}{1{,}06^4}=39\,408{,}87+50\,377{,}16+15\,841{,}87=105\,627{,}90$$

d.h. die Rückzahlung beträgt 105 627,90 € .

b) Schulden = Rückzahlungen

$$105\,627{,}90=20\,000+\frac{x}{1{,}06^4}\Rightarrow x=108\,103{,}25$$

d.h. die Rückzahlung nach vier Jahren beträgt 108 103,25 € .

c) Schulden = Rückzahlungen

$$\begin{aligned}105\,627{,}90 &= \frac{x}{1{,}06}+\frac{x}{1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}06\right)}+\frac{x}{1{,}06^3\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06\right)}\\ 105\,627{,}90 &= 0{,}9434x+0{,}8641x+0{,}8272x\\ 105\,627{,}90 &= 2{,}6347x\\ x &= 40\,091{,}05\end{aligned}$$

d.h. die einheitliche Rückzahlung beträgt jeweils 40 091,05 € .

Aufgabe 7

Ein Darlehen über 500 000 € wird von einer Bank zu folgenden Konditionen zur Verfügung gestellt:

Auszahlung:	100%
Darlehnszins:	9% p.a.
Tilgungsart:	Prozentannuitätentilgung
Erster Tilgungsbetrag:	1% der aufgenommenen Schuld
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Darlehnsaufnahme

a) Stellen Sie den Tilgungsplan für die ersten beiden Jahre auf.

b) Wie viele Prozent-Annuitäten können in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

d) Nach wie vielen Jahren liegt die Restschuld erstmals unter 350 000 € ?

Lösung zu Aufgabe 7

$A=(0{,}09+0{,}01)\cdot 500\,000=50\,000$

a)

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	45 000	–	45 000	500 000
2	45 000	5 000	50 000	495 000

b) $$n=-\frac{\ln\left[1-\frac{500\,000}{50\,000}\cdot 0{,}09\right]}{\ln 1{,}09}=26{,}71904$$

d.h. es sind 26 volle Prozent-Annuitäten zu leisten.

c) $K_{26} = 500\,000 \cdot 1{,}09^{26} - 50\,000 \cdot \dfrac{1{,}09^{26}-1}{0{,}09} = 33\,380{,}12$

$33\,380{,}12 \cdot 1{,}09 = 36\,384{,}33$

Die Restzahlung beträgt 36 384,33. €

d) *1.Lösungsweg:*

$$\begin{array}{rcll}
350\,000 &=& 500\,000 \cdot 1{,}09^k - 50\,000 \cdot \frac{1{,}09^k-1}{0{,}09} & \mid \cdot 0{,}09 \\
31\,500 &=& 45\,000 \cdot 1{,}09^k - 50\,000 \cdot 1{,}09^k + 50\,000 & \\
31\,500 &=& -5\,000 \cdot 1{,}09^k + 50\,000 & \mid -50\,000 \\
-18\,500 &=& -5\,000 \cdot 1{,}09^k & \mid \div(-5\,000) \\
3{,}7 &=& 1{,}09^k & \\
k &=& \dfrac{\ln 3{,}7}{\ln 1{,}09} & \\
k &=& 15{,}18 &
\end{array}$$

d.h. nach 16 Tilgungs-Jahren

d.h. nach 16+1=17 Jahren

2. Lösungsweg:

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{350\,000}{50\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln 1{,}09} = 11{,}53723$$

$26{,}71904 - 11{,}53723 = 15{,}18181$

F-Mathematik-Klausur vom 10. Juli 2007

Aufgabe 3
Ein Unternehmen hat gegenüber einer Bank die folgende Zahlungsverpflichtungen:

Fälligkeitsdatum	Betrag
31.01.2007	20 000 €
30.11.2007	10 000 €
31.05.2008	15 000 €
31.12.2008	12 000 €

Das Unternehmen ist in Liquiditätsschwierigkeiten und bittet die Bank um Zahlungsaufschub. Es einigt sich mit der Bank auf einen einheitlichen Zahlungstermin für die gesamten Zahlungsverpflichtungen: den 31.12.2009. Allerdings berechnet die Bank für den Zahlungsaufschub Zinsen mit einem Nominalzins von 6% p.a.

a) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine monatliche Verzinsung zum relativen Zins vereinbart wird?

b) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine einfache Verzinsung vereinbart wird? (Bewertungsstichtag: 31.12.2009)

c) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine relative gemischte Verzinsung vereinbart wird? (Bewertungsstichtag: 31.12.2009)

d) In das Unternehmen steigt ein neuer Kapitalgeber ein. Dieser bietet der Bank an, am 28.02.2007 zunächst 15 000 € zu zahlen. Der Rest der Schulden soll dafür am 30.06.2010 in einem Betrag gezahlt werden. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn von einer relativen gemischten Verzinsung ausgegangen wird? (Bewertungsstichtag: 30.06.2010)

Aufgabe 4
Ein Bauunternehmer möchte ein Baugelände kaufen und hat die Wahl zwischen zwei verschiedenen Finanzierungsmodellen:
Finanzierungsmodell A

- eine Sofortzahlung in Höhe von 60 000 €
- eine Zahlung in Höhe von 40 000 € zwei Jahre später
- vier Jahre lang jährlich vorschüssige Raten in Höhe von 1 000 €, wobei die erste Rate zum Zeitpunkt der Zahlung in Höhe von 40 000 € fällig wird

Finanzierungsmodell B

- eine Sofortzahlung in Höhe von 20 000 €
- drei Jahre lang monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 1 500 €, wobei die erste Monatsrate sofort fällig wird

- zwei Jahre lang vierteljährlich nachschüssige Rückzahlungsraten in Höhe von 1 000 €, wobei die erste Vierteljahresrate vier Monate nach Zahlung der letzten Monatsrate fällig wird
- eine Rückzahlung in Höhe von 30 000 € zwei Jahre nach Zahlung der letzten vierteljährlichen Rückzahlungsrate

a) Berechnen Sie bei einem Jahreszins von 5% die Barwerte der beiden Finanzierungsmodelle.

b) Für welches Finanzierungsmodell soll sich der Bauunternehmer entscheiden? Begründen Sie kurz Ihr Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $20\,000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{35}{12}} + 10\,000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{25}{12}} + 15\,000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{19}{12}} +$
$12\,000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = 64\,373{,}61$
d.h. die Rückzahlung beträgt 64 373,61 €.

b) $20\,000\cdot\left(1+\frac{35}{12}\cdot 0{,}06\right) + 10\,000\cdot\left(1+\frac{25}{12}\cdot 0{,}06\right) + 15\,000\cdot\left(1+\frac{19}{12}\cdot 0{,}06\right) +$
$12\,000\cdot 1{,}06 = 63\,895$
d.h. die Rückzahlung beträgt 63 895 €.

c) $20\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{11}{12}\cdot 0{,}06\right) + 10\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{1}{12}\cdot 0{,}06\right) + 15\,000\cdot 1{,}06\cdot$
$\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0{,}06\right) + 12\,000\cdot 1{,}06 = 64\,176{,}64$
d.h. die Rückzahlung beträgt 64 176,64 €.

d) Schulden = Rückzahlungen
$20\,000\cdot 1{,}06^3\cdot\left(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}06\right) + 10\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0{,}06\right) + 15\,000\cdot 1{,}06^2\cdot$
$\left(1+\frac{1}{12}\cdot 0{,}06\right) + 12\,000\cdot 1{,}06\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}06\right) = 15\,000\cdot 1{,}06^3\cdot\left(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}06\right) + x$
$66\,084{,}958 = 18\,222{,}5448 + x \Rightarrow x = 47\,862{,}41$
d.h. die Rückzahlung beträgt 47 862,41 €.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Modell A:
$K_0 = 60\,000 + \frac{40\,000}{1{,}05^2} + 1\,000\cdot 1{,}05\cdot\frac{1{,}05^4-1}{0{,}05}\cdot\frac{1}{1{,}05^6} = 60\,000 + 36\,281{,}1791 +$
$3\,377{,}0957 = 99\,658{,}2749$
d.h. der Barwert beträgt 99 658,28 €.
Modell B:
$K_0 = 20\,000 + 1\,500\cdot\left(12+\frac{13}{2}\cdot 0{,}05\right)\cdot\frac{1{,}05^3-1}{0{,}05}\cdot\frac{1}{1{,}05^3} + 1\,000\cdot\left(4+\frac{3}{2}\cdot 0{,}05\right)\cdot$

$\dfrac{1{,}05^2-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^5}+\dfrac{30\,000}{1{,}05^7}=20\,000+50\,346{,}0479+6\,545{,}3817+21\,320{,}4399=$
98 211,8695
d.h. der Barwert beträgt 98 211,87 €.

b) Modell B mit dem kleineren Barwert ist vorteilhafter.

F-Mathematik-Klausur vom 6. Februar 2007

Aufgabe 3
Ein Sparer legt am 31.03.2006 bei seiner Bank 10 000 € bei vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 3,5 % an.

a) Wie hoch ist die effektive Verzinsung, die der Sparer pro Jahr erhält?

b) Über welches Guthaben könnte der Sparer am 31.12.2009 verfügen?

c) Nach wie vielen Quartalen übersteigt das Guthaben des Sparers zum ersten Mal den Betrag von 11 000 € ?

d) Angenommen der Sparer hätte das Guthaben nicht einfach bis zum 31.12.2009 bei der Bank liegen gelassen, sondern es wäre zu den folgenden Kapitalbewegungen gekommen:

- zusätzliche Einzahlung von 5 000 € am 01.07.2007
- Abhebung von 2 000 € am 30.09.2008
- Abhebung von 1 000 € am 01.04.2009

Über welches Guthaben hätte der Sparer dann am 31.12.2009 verfügen können bei nach wie vor vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 3,5%?

Aufgabe 4
Auf ein Sparkonto zahlt ein Elternpaar bei 4% Jahreszinsen zur Finanzierung des Studiums eines Kindes wie folgt Beträge ein:

- Einzahlung am 31.12.2006 über 1 000 €
- Einzahlung am 31.12.2008 über 2 000 €
- Einzahlung am 31.12.2011 über 3 000 €
- regelmäßige Einzahlungen am Ende eines jeden Monats über 100 € ab dem Jahr 2010 bis einschließlich dem Jahr 2020.

a) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2024?

b) Wie viele volle Jahre lang können ab dem Jahr 2025 aus dem Guthaben jeweils 550 € zu Beginn eines Monats entnommen werden?

c) Welche gleich hohen regelmäßigen Abhebungen jeweils zu Beginn eines Monats können ab dem Jahr 2025 über sechs Jahre aus dem angesparten Guthaben entnommen werden?

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^4 = 1{,}0355$
d.h. der Effektivzins beträgt 3,55 % p.a.

b) *1. Lösungsweg:*
$K_{3,75} = 10\,000 \cdot \left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{4\cdot 3{,}75} = 10\,000 \cdot 1{,}00875^{15} = 11\,396{,}02$
d.h. das Guthaben beträgt 11 396,02 € .
2. Lösungsweg:
$K_{3,75} = 10\,000 \cdot 1{,}0355^{3{,}75} = 11\,396{,}02$

c) *1. Lösungsweg:*

$$\begin{aligned}
11\,000 &= 10\,000 \cdot \left(1+\tfrac{0{,}035}{4}\right)^{4\cdot n} && \mid \div 10\,000\\
1{,}1 &= 1{,}00875^{4n}\\
4n &= \log_{1{,}100875} 1{,}1\\
4n &= \frac{\ln 1{,}1}{1{,}00875}\\
4n &= 10{,}94 \text{ Quartale} && \mid \div 4\\
n &= 2{,}735 \text{ Jahre}
\end{aligned}$$

d.h. nach elf Quartalen.
2. Lösungsweg:
$n = \dfrac{\ln\left[\frac{11\,000}{10\,000}\right]}{\ln 1{,}0355} = 2{,}735$ Jahre
$4 \cdot 2{,}735 = 10{,}94$ Quartale.

d) *1. Lösungsweg:*
$11\,396{,}02 + 5\,000 \cdot \left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{4\cdot 2{,}5} - 2\,000 \cdot \left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{4\cdot 1{,}25} - 1\,000 \cdot \left(1+\frac{0{,}035}{4}\right)^{4\cdot 0{,}75} = 13\,735{,}66$
d.h. das Guthaben beträgt 13 735,66 € .
2. Lösungsweg:
$11\,396{,}02 + 5\,000 \cdot 1{,}0355^{2{,}5} - 2\,000 \cdot 1{,}0355^{1{,}25} - 1\,000 \cdot 1{,}0355^{0{,}75} = 13\,735{,}66$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Guthaben am 31.12.2020:
$1000 \cdot 1{,}04^{14} + 2000 \cdot 1{,}04^{12} + 3000 \cdot 1{,}04^{9} + 100 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{11}-1}{0{,}04} = 25\,684$
Guthaben am 31.12.2024:
$25\,684 \cdot 1{,}04^4 = 30\,046{,}65$
d.h. das Guthaben beträgt 30 046,65 €.

b) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{30\,046{,}65}{550 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04)} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 5{,}005155$

d.h. volle fünf Jahre lang können die Beträge entnommen werden.

c) $30\,046{,}65 = r'_M \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^6} \Rightarrow r'_M = 467{,}52$

d.h. über sechs Jahre können 467,52 € jeweils zu Beginn eine Monats entnommen werden.

F-Mathematik-Klausur vom 25. September 2006

Aufgabe 2
Ein Haus steht für 300 000 € zum Verkauf. Eine Familie möchte dieses Haus erwerben und nimmt dazu einen Kredit unter den folgenden Bedingungen auf:

- 100 000 € Eigenkapital werden eingesetzt
- Annuitäten-Tilgung in Höhe von 16 000 €
  Der erste Rückzahlungsbetrag ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme
- Zinsen betragen 7% p.a.

a) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen?

b) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) Statt der jährlichen Zahlungen soll der Kredit jeweils zu Beginn eines Monats mit Beträgen in Höhe von 1 250 € zurückgezahlt werden. Der erste Betrag ist fällig bei Kreditaufnahme. Wie viele Jahre muss die Familie dann den Kredit zurückzahlen?

Lösung zu Aufgabe 2:
Kredit = Kaufpreis − Eigenkapital = 300 000 − 100 000 = 200 000

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{16\,000} \cdot 0{,}07\right]}{\ln 1{,}07} = 30{,}7$
d.h. es sind 30 volle Annuitäten zu zahlen.

b) $K_{30} = 200\,000 \cdot 1{,}07^{30} - 16\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^{30} - 1}{0{,}07} = 11\,078{,}43$
$11\,078{,}43 \cdot 1{,}07 = 11\,853{,}92$
d.h. ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt die Restschuld 11 853,92 €.

c) Ersatz-Jahresrente r_j
$r_j = 1\,250(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}07) = 15\,568{,}75$
Laufzeit n:
$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{15\,568{,}75} \cdot 0{,}07\right]}{\ln 1{,}07} = 33{,}9$$
d.h. die letzten monatlichen Rückzahlungen erfolgen im 34. Jahr nach Darlehnsaufnahme.

F-Mathematik-Klausur vom 11. Juli 2006

Aufgabe 3
Student A. zahlt vorschüssig monatlich Raten von 50 € ein. Die Laufzeit dieses Sparvorhabens ist so bemessen, dass er am Ende dieses Sparvorhabens über 10 572 € verfügen könnte. Die Zinsen betragen 3,2 % p.a.

a) Wie viele Jahre lang muss Student A. einzahlen?

b) Wie hoch ist der Barwert dieses Sparvorhabens?

c) Welchen Betrag könnte Student A. vier Jahre nach Sparbeginn abheben, wenn er am Ende der Laufzeit statt 10 572 nur 8 000 € benötigt?

d) Welche sechs gleich großen Beträge könnte Student A. jeweils am Ende der ersten sechs Jahre abheben, wenn er am Ende der Laufzeit statt 10 572 nur 8 000 € benötigt?

Aufgabe 4
Zur Finanzierung seines Studiums an der FH Köln nimmt ein Studierender einen Kredit bei einer Bank auf. Mit diesem Kredit möchte er die Studiengebühren in Höhe von 500 € pro Semester und seine anfallenden Lebenshaltungskosten begleichen. Der Kredit ist wie folgt ausgestaltet:

- monatliche Auszahlungen von 550 € beginnend am 1.10.2006 (Beginn des Wintersemesters)
- Zinsen 5,1 % p.a.
- Laufzeit vier Jahre
- Rückzahlungsbeginn frühestens 12 Monate nach der letzten Auszahlung
- Flexibilität in der Rückzahlungshöhe
- außerplanmäßige Rückzahlung in der Tilgungsphase möglich und kostenfrei

a) Wie hoch ist die Schuld am Ende der Laufzeit des Kredits?

b) Der Kreditnehmer entscheidet sich, mit der Rückzahlung zwei Jahre zu warten und dann vierteljährlich nachschüssig 450 € zurückzuzahlen, wobei die erste Rate am 31.12.2012 fällig wird. Der Zins beträgt nach wie vor 5,1 % p.a. Wie viele Jahre werden Rückzahlungsraten in voller Höhe geleistet?

c) Wie hoch ist in b) die Restschuld zum Zeitpunkt der letzten vollen Rückzahlungsrate?

d) Durch welche Einmalzahlung am 30.09.2012 hätte der Kreditnehmer die Rückzahlungsdauer in b) auf 20 Jahre reduzieren können?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente r_J:
$r_J = 50(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}032) = 610{,}40$
Laufzeit in Jahren:
$$n = \frac{\ln[1 + \frac{10\,572}{610{,}4} \cdot 0{,}032]}{\ln 1{,}032} = 14$$
d.h. Student A. muss 14 Jahre lang sparen.

b) Barwert:
$$R_0 = \frac{10\,572}{1{,}032^{14}} = 6\,802{,}08$$
d.h. der Barwert beträgt 6 802,08 €.

c) $$\frac{10\,572 - 8\,000}{1{,}032^{10}} = 1\,877{,}04$$
d.h. Student A. könnte am Ende des vierten Jahres 1 877,04 € abheben.

d) Sechs Abhebungen r_j:
$$10\,572 - r_j \cdot \frac{1{,}032^6 - 1}{0{,}032} \cdot 1{,}032^8 = 8\,000$$
$$r_j \cdot \frac{1{,}032^6 - 1}{0{,}032} \cdot 1{,}032^8 = 2\,572 \Rightarrow r_j = 307{,}51$$
d.h. Student A. kann sechs Jahre lang jeweils 307,51 € am Ende des Jahres abheben.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$$r_J = 550(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}051) = 6\,782{,}325$$
Schuld nach 4 Jahren:
$$R_4 = 6\,782{,}325 \cdot \frac{1{,}051^4 - 1}{0{,}051} = 29\,276{,}1544$$
d.h. die Schuld am 30.09.2010 beträgt 29 276,15 €.

b) Schuld am 30.09.2012:
$29\,276{,}15 \cdot 1{,}051^2 = 32\,338{,}47$
Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$$r_J = 450(4 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}051) = 1\,834{,}425$$

1. Laufzeit der Rückzahlungen:
$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{32\,338{,}47}{1\,834{,}425} \cdot 0{,}051]}{\ln 1{,}051} = 46{,}1$$
d.h. 46 Jahre lang erfolgen Rückzahlungen in voller Höhe.
2. $$\begin{aligned} K_{46} &= 32\,338{,}47 \cdot 1{,}051^{46} - 1\,834{,}425 \cdot \tfrac{1{,}051^{46}-1}{0{,}051} \\ &= 318\,745{,}7523 - 318\,562{,}2954 \\ &= 183{,}4569 \end{aligned}$$
d.h. die Restschuld nach 46 Jahren beträgt 183,46 €.

3. Barwert der quartalsmäßigen Rückzahlungen:
$R_0 = 1\,834{,}425 \cdot \dfrac{1{,}051^{20} - 1}{0{,}051} \cdot \dfrac{1}{1{,}051^{20}} = 22\,668{,}3881$
$32\,338{,}47 - 22\,668{,}3881 = 9\,670{,}08$
d.h. die Einzahlung beträgt $9\,670{,}08$ €.

F-Mathematik-Klausur vom 19. April 2006

Aufgabe 4
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie einen Kredit über 195 000 € auf. In den ersten 15 Jahren beträgt der Jahreszins 4 %, in den darauf anschließenden Jahren liegt er bei 5 %. Es werden zwei verschiedene Rückzahlungsmodelle vorgeschlagen:

a) 1. Rückzahlungsmodell:

- die ersten 15 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten über 3 000 €
- mit der letzten Quartalsrate eine zusätzliche Einmalzahlung über 10 000 €
- zehn Jahre lang vorschüssige Monatsraten über 1 000 €, erste Monatsrate ist fällig zu Beginn des 16. Jahres nach Kreditaufnahme
- eine Restzahlung einen Monat nach der letzten Monatsrate

Wie hoch ist die Restzahlung einen Monat nach der letzten Monatsrate?

b) 2. Rückzahlungsmodell:

- vorschüssige Quartalsraten über 3 500 €, erste Quartalsrate ist fällig sofort bei Kreditaufnahme
- eine Restzahlung drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate

Wie hoch ist die Restzahlung drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate?

Lösung zu Aufgabe 4

a) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente über 15 Jahre:
$$3\,000 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}04) = 12\,180$$
Nachschüssige Ersatz-Jahresrente über 10 Jahre:
$$1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 12\,325$$
Wert der Rückzahlungen am Ende des 25. Jahres:
$$\begin{aligned} 12\,180 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} \cdot 1{,}05^{10} + 10\,000 \cdot 1{,}05^{10} + 12\,325 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} &= \\ 397\,266{,}71 + 16\,288{,}95 + 155\,022{,}53 &= 568\,578{,}18 \end{aligned}$$
Wert des Kredits am Ende des 25. Jahres:
$$195\,000 \cdot 1{,}04^{15} \cdot 1{,}05^{10} = 572\,041{,}70$$
Differenz Kredit − Rückzahlungen:
$$572\,041{,}70 - 568\,578{,}18 = 3\,463{,}52$$
d.h. einen Monat nach der letzten Monatsrate sind noch 3 463,52 € zu zahlen, damit der Kredit vollständig zurückgezahlt ist.

b) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente in den ersten 15 Jahren:
$$3\,500 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 14\,350$$
Restschuld am Ende des 15. Jahres:
$$K_{15} = 195\,000 \cdot 1{,}04^{15} - 14\,350 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} = 351\,183{,}98 - 287\,338{,}48 = 63\,845{,}50$$

Nachschüssige Ersatz-Jahresrente ab dem 16. Jahr:

$$3\,500 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}05) = 14\,437{,}50$$

Laufzeit n (in Jahren):

$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{63\,845{,}50}{14\,437{,}50} \cdot 0{,}05]}{\ln 1{,}05} = 5{,}1216$$

d.h. es sind insgesamt $15 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 80$ volle Quartalsraten über 3 500 € zu zahlen.

Restschuld am Ende des 20. Jahres:

$$K_{20} = 63\,845{,}50 \cdot 1{,}05^5 - 14\,437{,}50 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}5} = 81\,484{,}84 - 79\,776{,}30 = 1\,708{,}53$$

d.h. die Restschuld drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate beträgt 1 708,53 €.

F-Mathematik-Klausur vom 2. Februar 2006

Aufgabe 3
Ein Kunde mit geringem Eigenkapital nimmt einen Kredit in Höhe von 200 000 € zu 5,1 % Jahreszins auf. Der Kreditvertrag sieht vor, dass bis zur einmaligen Kredit-Rückzahlung der Kunde lediglich die Kreditzinsen zahlt. Für die einmalige Kredit-Rückzahlung verpflichtet die Bank den Kunden, eine Kapital-Lebensversicherung zu 4,9 % Zinsen p.a. abzuschließen. Die einmalige Kredit-Rückzahlung soll nach zwanzig Jahren durch die dann fällige Kapital-Lebensversicherung erfolgen. Sowohl die Zahlung der Kreditzinsen als auch die Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung erfolgen monatlich nachschüssig.

a) Wie hoch sind die monatlichen Zahlungen der Kreditzinsen?

b) Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung?

c) Wie hoch ist die monatliche Belastung des Kunden?

Aufgabe 4
Ein Kleinunternehmer hat am 31.03.2003 einen Kredit über 24 000 € bei relativer gemischter Verzinsung zu 5,6 % p.a. aufgenommen. Der Vertrag über die Tilgungsmodalitäten sieht wie folgt aus:

- 2003 und 2004 zahlt er gar nichts
- 2005 und 2006 begleicht er mit vorschüssigen Monatsraten nur die anfallenden Jahreszinsen
- ab 01.01.2007 zahlt er dann monatlich vorschüssig 300 € bis zur endgültigen Tilgung der Schuld

a) Wie hoch ist die Schuld am 31.12.2004?

b) Wie hoch sind die Zahlungen zu Beginn eines jeden Monats der Jahre 2005 und 2006?

c) Wie oft sind ab 01.01.2007 volle vorschüssige Monatsraten zu zahlen?

d) Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2015?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Jährliche Kreditzinsen:
$200\,000 \cdot 0{,}051 = 10\,200$
monatliche Kreditzinsen:
$10\,200 = r(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}051) \Rightarrow r = 830{,}59$
d.h. der Kunde zahlt monatlich 830,59 € an Kreditzinsen.

b) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:

$200\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}049^{20} - 1}{0{,}049} \Rightarrow r_J = 6\,112{,}7235$

monatliche nachschüssige Einzahlungen r_M:

$6\,112{,}7235 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}049) \Rightarrow r_M = 498{,}21$

d.h. die monatlichen Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung betragen 498,21 €.

c) $830{,}59 + 498{,}21 = 1\,328{,}80$

d.h. die monatlichen Belastungen des Kunden betragen 1 328,80 €.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $24\,000 \cdot (1 + \dfrac{3}{4} \cdot 0{,}056) \cdot 1{,}056 = 26\,408{,}45$

d.h. die Schulden am 31.12.2004 betragen 26 408,45 €.

b) Jahreszins $= 26\,408{,}45 \cdot 0{,}056 = 1\,478{,}87$

monatliche vorschüssige Zahlungen:

$1\,478{,}87 = r(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}056) \Rightarrow r = 119{,}61$

d.h. in den Jahren 2005 und 2006 zahlt er monatlich 119,61 €.

c) Die Schulden am 01.01.2007 betragen 26 408,45 €

jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:

$r_J = 300 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}056) = 3\,709{,}20$

Laufzeit (in Jahren):

$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{26\,408{,}45}{3\,709{,}2} \cdot 0{,}056]}{\ln 1{,}056} = 9{,}335$ Jahre

Laufzeit in Monaten:

$0{,}335 \cdot 12 = 4{,}02$ d.h. volle Rückzahlungen sind 9 Jahre und 4 Monate zu leisten.

d.h. es sind 112 volle Monatsraten zu zahlen.

(d.h. letzte volle Rückzahlung erfolgt Anfang April 2016.)

d) $K_9 = 26\,408{,}45 \cdot 1{,}056^9 - 3\,709{,}20 \cdot \dfrac{1{,}056^9 - 1}{0{,}056} = 1\,199{,}43$

d.h. die Restschuld am 31.12.2015 beträgt 1 199,43 €

F-Mathematik-Klausur vom 12. Juli 2005

Aufgabe 3
Die Geschäftsführerin einer GmbH schließt zur Altersvorsorge eine Rentenversicherung bei einem Versicherungsunternehmen ab. Die Geschäftsführerin zahlt jährlich 3 000 € ein, die erste Einzahlung erfolgt am 35. Geburtstag, die letzte Einzahlung soll an ihrem 65. Geburtstag erfolgen.

a) Welches Kapital hat sich durch diese Einzahlungen am 65. Geburtstag der Geschäftsführerin bei dem Versicherungsunternehmen angesammelt, wenn von einem Zins von 5,3 % p.a. ausgegangen wird? (In dem Zins von 5,3 % sind enthalten Garantiezins, Überschussbeteiligung und das von der Versicherung übernommene Risiko.)

b) Für die Auszahlungsphase sieht die Rentenversicherung eine monatliche nachschüssige Zahlweise vor, wobei die erste Rentenauszahlung einen Monat nach der letzten Einzahlung erfolgen soll. Welche monatliche Rentenzahlung ergibt sich daraus bei 5,3 % Jahreszinsen, wenn von einer Rentenauszahlung von zwanzig Jahren ausgegangen wird?

c) Aufgrund der schlechten Lage auf dem Kapitalmarkt teilt das Versicherungsunternehmen der Geschäftsführerin mit, dass in den ersten zehn Jahren der Einzahlungsphase mit einer Verzinsung von 5,3 % p.a. kalkuliert werden kann, in den restlichen Jahren der Einzahlungsphase der Zins allerdings auf 4,9 % p.a. abgesenkt werden muss. Welches Kapital hat sich am 65. Geburtstag der Geschäftsführerin durch die Einzahlungen bei dem Versicherungsunternehmen angesammelt?

Aufgabe 4
Bei einem Privatverleiher wurden zweimal 8 000 € ausgeliehen, zunächst am 28.02.2003 und dann am 30.06.2004. Die Konditionen sind bankmäßige gemischte Verzinsung bei einem Jahreszins von 9,6 %.

a) Welcher Betrag wäre insgesamt am 31.08.2007 zurückzuzahlen?

b) Welche Zwischenrückzahlung am 31.12.2005 würde die Rückzahlung am 31.08.2007 auf 16 000 € reduzieren?

c) Nach wie vielen Tagen im Jahr 2006 ist die Schuld auf 20 000 € angestiegen?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Guthaben der nachschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$R_{31} = 3\,000 \cdot \frac{1{,}053^{31} - 1}{0{,}053} = 224\,020{,}28$$

d.h. das Kapital beträgt 224 020,28 €

Die Einzahlungen können auch als vorschüssige Rente gerechnet werden, müssen dann aber noch ein Jahr abgezinst werden:

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am Vortag des 66. Geburtstags:

$$R'_{31} = 3\,000 \cdot 1{,}053 \cdot \frac{1{,}053^{31} - 1}{0{,}053} = 235\,893{,}3536$$

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\frac{235\,893{,}3536}{1{,}053} = 224\,020{,}28$$

b) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:

$$224\,020{,}28 = r_J \cdot \frac{1{,}053^{20} - 1}{0{,}053} \cdot \frac{1}{1{,}053^{20}} \Rightarrow r_J = 18\,436{,}04$$

monatliche nachschüssige Rente r_M:

$$18\,436{,}04 = r_M(12 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}053) \Rightarrow r_M = 1\,499{,}90$$

d.h. die monatlichen Auszahlungen betragen 1 499,90 €.

c) Je nachdem, ob die Zahlungen über 3000 € als vorschüssig oder nachschüssig aufgefasst werden, sind aufgrund der unpräzisen Angabe „die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase“ die Ergebnisse unterschiedlich.

1. Möglichkeit: die Zahlungen über 3000 € sind nachschüssige Zahlungen. Dann sind die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase die Jahre einen Tag nach dem 34. Geburtstag bis zum 44. Geburtstag. Die Lösung lautet dann wie folgt:

Guthaben der nachschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\begin{aligned} R_{31} &= 3\,000 \cdot \frac{1{,}053^{10} - 1}{0{,}053} \cdot 1{,}049^{21} + 3\,000 \cdot \frac{1{,}049^{21} - 1}{0{,}049} \\ &= 104\,496{,}41 + 105\,965{,}56 \\ &= 210\,461{,}97 \end{aligned}$$

d.h. das Kapital beträgt 210 461,97 €.

2. Möglichkeit: die Zahlungen über 3000 € sind vorschüssige Zahlungen. Dann sind die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase die Jahre ab dem 35. Geburtstag bis einen Tag vor dem 45. Geburtstag. Die Lösung lautet dann wie folgt:

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € ein Jahr nach dem 65. Geburtstag:

$$\begin{aligned} R'_{31} &= 3\,000 \cdot 1{,}053 \cdot \frac{1{,}053^{10} - 1}{0{,}053} \cdot 1{,}049^{21} + 3\,000 \cdot 1{,}049 \cdot \frac{1{,}049^{21} - 1}{0{,}049} \\ &= 110\,034{,}70 + 111\,157{,}90 \\ &= 221\,192{,}70 \end{aligned}$$

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\frac{R'_{31}}{1{,}049} = 210\,860{,}50$$

d.h. das Kapital beträgt 210 860,50 €.

Der Unterschied in den beiden Möglichkeiten besteht darin, ob der Zins in dem Jahr vom 44. bis zum 45. Geburtstag 5,3 oder 4,9 % beträgt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $8\,000 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^3 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096)$

$+8\,000 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^2 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096) \quad = 22\,818{,}37$

d.h. es sind 22 818,37 € zurückzuzahlen.

b) $x \cdot 1{,}096 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096) = 22\,818{,}37 - 16\,000 \Rightarrow x = 5\,846{,}94$
d.h. die Zwischenrückzahlung müsste 5 846,94 € betragen.

c) Schuld am 31.12.2005:
$8\,000 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^2 + 8\,000 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096 = 19\,567{,}37$
$19\,567{,}37 \cdot (1 + \frac{x}{360} \cdot 0{,}096) = 20\,000 \Rightarrow x = 82{,}9$
d.h. nach 83 Tagen (d.h. am 24.03.2006)

F-Mathematik-Klausur vom 30. März 2005

Aufgabe 2
Eine Studentin erbt 25 189 € nach Abzug aller Steuern und Abgaben. Sie möchte sich diese Erbschaft nicht sofort, sondern zwecks Finanzierung ihres Studiums als monatlich nachschüssige Rente auszahlen lassen. Die erste Monatsrate wird einen Monat nach Erhalt der Erbschaft ausgezahlt. Die Studentin geht bei ihren Überlegungen von einer Reststudiendauer von fünf Jahren und einem Zins von 3,25% pro Jahr aus.

a) Berechnen Sie die nachschüssige Monatsrente.

b) Wie hoch wäre die monatlich nachschüssige Rente, wenn die Studentin für einen Autokauf am Ende des zweiten Jahres 6 500 € einplanen und nur den Restbetrag in eine fünfjährige Rentenzahlung umwandeln möchte?

c) Wie viele Jahre (ohne Beachtung der Reststudienzeit) wäre aus der Ebschaft eine monatlich nachschüssige Rente in Höhe von 500 € finanzierbar?

d) Die Studentin entscheidet sich für a), d.h. sie bezieht eine monatlich nachschüssige Rente, und wendet dafür die komplette Erbschaft auf. Nach zwei Jahren ändert die Bank ihre Konditionen und senkt den Zins von 3,25 auf 3% pro Jahr ab. Wie hoch sind jetzt die nachschüssigen Monatsraten für die letzten drei Jahre?

Aufgabe 5
Ein Investor möchte in drei Anlagemöglichkeiten A_1, A_2, A_3 investieren. Die drei Anlagemöglichkeiten haben jeweils eine Laufzeit von drei Perioden. Die Rückflüsse in Prozent des Anlagebetrages der drei Möglichkeiten ergeben sich jeweils am Periodenende wie folgt:

	Anlagemöglichkeit		
	A_1	A_2	A_3
Periode 1	0%	5%	3%
Periode 2	5%	5%	3%
Periode 3	5%	0%	3%

Ferner besteht ein Liquiditätsbedarf

- von mindestens 2 000 GE am Ende der ersten Periode
- von mindestens 6 000 GE am Ende der zweiten Periode
- von mindestens 8 000 GE am Ende der dritten Periode

Der Liquiditätsbedarf soll jeweils durch die Rückflüsse der zugehörigen Periode gedeckt werden.
Ziel ist es, die Investitionsbeträge für die drei Anlagemöglichkeiten so festzulegen,

dass insgesamt möglichst wenig Geld zu investieren ist. Rechnen Sie drei Tableaus des Simplex-Algorithmus und geben Sie zum dritten Tableau den zugehörigen Investitionsplan an.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$25\,189 = r_J \cdot \dfrac{1{,}0325^5 - 1}{0{,}0325} \cdot \dfrac{1}{1{,}0325^5} \Rightarrow r_j = 5\,539{,}45$

Nachschüssige Monatsrente r_M:

$5\,539{,}45 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) \Rightarrow r_M = 454{,}85$

d.h. die Monatsrente beträgt 454,85 €.

b) Barwert der fünfjährigen Rente:

$25\,189 - \dfrac{6\,500}{1{,}0325^2} = 19\,091{,}7608$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$19\,091{,}7608 = r_J \cdot \dfrac{1{,}0325^5 - 1}{0{,}0325} \cdot \dfrac{1}{1{,}0325^5} \Rightarrow r_J = 4\,198{,}58$

Nachschüssige Monatsrente r_M:

$4\,198{,}58 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) \Rightarrow r_M = 344{,}75$

d.h. die Monatsrente beträgt 344,75 €.

c) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$r_J = 500(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) = 6\,089{,}375$

Laufzeit:

$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{25\,189}{6\,089{,}375} \cdot 0{,}0325]}{\ln 1{,}0325} = 4{,}5141$

d.h. vier Jahre lang könnte die volle Monatsrente bezogen werden.

d) Guthaben am Ende des 2. Jahres:

$K_2 = 25\,189 \cdot 1{,}0325^2 - 5\,539{,}45 \cdot 1{,}0325 - 5\,539{,}45 = 15\,593{,}9588$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$15\,593{,}9588 = r_J \cdot \dfrac{1{,}03^3 - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^3} \Rightarrow r_J = 5\,512{,}9379$

Nachschüssige Monatsrente r_M:

$5\,512{,}9379 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}03) \Rightarrow r_M = 453{,}18$

d.h. die Monatsrente beträgt 453,18 €.

Lösung zu Aufgabe 5

x_1= Investitionssumme (in GE) in A_1
x_2= Investitionssumme (in GE) in A_2
x_3= Investitionssumme (in GE) in A_3
Minimum-Problem:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0{,}05x_2 + 0{,}03x_3 & \geq & 2\,000 \\
\text{II} & 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}03x_3 & \geq & 6\,000 \\
\text{III} & 0{,}05x_1 + 0{,}03x_3 & \geq & 8\,000 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \stackrel{!}{=} \text{minimal} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

1	x_1	x_2	x_3	
e_1	0	$-0{,}05$	$-0{,}03$	$-2\,000$
e_2	$-0{,}05$	$-0{,}05$	$-0{,}03$	$-6\,000$
e_3	$-0{,}05$	0	$\boxed{-0{,}03}$	$-8\,000$
	1	1	1	0

2	x_1	x_2	e_3	
e_1	$\boxed{0{,}05}$	$-0{,}05$	-1	6 000
e_2	0	$-0{,}05$	-1	2 000
x_3	5/3	0	100/3	266 6662/3
	$-2/3$	1	100/3	$-266\,6662/3$

3	e_1	x_2	x_3	
x_1	20	-1	20	120 000
e_2	0			2 000
x_3	$-100/3$			66 6662/3
	40/3	1/3	20	$-186\,6662/3$

In diesem 3. Tableau steht schon die optimale Lösung. In Anlage A_1 sind 120 000 GE zu investieren, in Anlage A_2 nichts und in Anlage A_3 66 666,67 GE, damit die Investitionssumme minimal ist und gleichzeitig die Geldmittel an jedem Periodenende zur Verfügung stehen.

F-Mathematik-Klausur vom 11. Februar 2005

Aufgabe 2
Herr Z. hat zum 31.12.2001 seine Ersparnisse und eine Abfindung bei einer Hausbank angelegt, um in den Jahren 2002 bis 2011 eine vorschüssige Monatsrente von 500 € zu beziehen. Herr Z. und seine Hausbank vereinbaren einen Zins von 4,25% pro Jahr.

a) Wie hoch war der am 31.12.2001 angelegt Betrag?

b) Unvorhergesehen muss Herr Z. zum Ende des Jahres 2006 einen Betrag in Höhe von 8 500 € für die Erneuerung seiner Heizungsanlage von diesem Konto entnehmen. Dafür will er in diesem Jahr (2006) auf die monatliche Auszahlung verzichten. Wie hoch werden dann die vorschüssigen Monatsraten für die Jahre 2007 bis 2011 ausfallen?

c) Herr Z. überlegt:„Hätte man die Zahlung von 8 500 € zum 31.12.2006 für die Erneuerung der Heizungsanlage von Anfang an in die Planung einbezogen. Welche vorschüssige Monatsrente hätte sich dann für die Jahre 2002 bis 2011 ergeben?“. Beantworten Sie Herrn Z. diese Frage.

Aufgabe 3
Eine Familie kauft für 220 000 € ein Haus. Dazu nimmt sie bei 6% Zinsen p.a. von einer Bank einen Kredit in Höhe von 60% des Kaufpreises auf. Zur Rückzahlung des Kredits wird vereinbart, zu Beginn eines jeden Quartals 4 000 € an die Bank zu überweisen. Die erste Rückzahlung ist fällig bei Darlehnsaufnahme.

a) Wie viele Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten?

b) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des neunten Jahres?

c) Zu Beginn des neunten Jahres nach Kreditaufnahme soll die noch bestehende Schuld durch eine einmalige Restzahlung zurückgezahlt werden. Für die vorzeitige Rückzahlung erhebt die Bank wegen entgangener Zinsen eine so genannte Vorfälligkeitsentschädigung in Höhe von 2,5% des vorzeitig zurückgezahlten Kapitals. Welcher Betrag ist dann zu Beginn des neunten Jahres an die Bank zu zahlen?

Lösung zu Aufgabe 2

a) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 500(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) = 6\,138{,}125$
Barwert der Rentenzahlungen:
$$R_0 = 6\,138{,}125 \cdot \frac{1{,}0425^{10} - 1}{0{,}0425} \cdot \frac{1}{1{,}0425^{10}} = 49\,171{,}83$$
d.h. der angelegte Betrag betrug 49 171,83 €.

b) Guthaben am 31.12.2005:
$$R_4 = 49\,171{,}83 \cdot 1{,}0425^4 - 6\,138{,}125 \cdot \frac{1{,}0425^4 - 1}{0{,}0425} = 31\,916{,}659$$

Guthaben am 31.12.2006:
$31\,916{,}659 \cdot 1{,}0425 - 8\,500 = 24\,773{,}117$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$24\,773{,}117 = r_J \frac{1{,}0425^5 - 1}{0{,}0425} \cdot \frac{1}{1{,}0425^5} \Rightarrow r_J = 5\,603{,}8534$$

Vorschüssige Monatsrente r_M:
$5\,603{,}8534 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) \Rightarrow r_M = 456{,}48$
d.h. die Monatsrente in den Jahren 2007 bis 2011 beträgt 456,48 €.

c) Barwert der Monatsrente:
$$49\,171{,}83 - \frac{8\,500}{1{,}0425^5} = 42\,268{,}8183$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$42\,268{,}8183 = r_J \cdot \frac{1{,}0425^{10} - 1}{0{,}0425} \cdot \frac{1}{1{,}0425^{10}} \Rightarrow r_J = 5\,276{,}42$$

Vorschüssige Monatsrente r_M:
$5\,276{,}42 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) \Rightarrow r_M = 429{,}81$
d.h. die Monatsrente beträgt 429,81 €.

Lösung zu Aufgabe 3
$0{,}6 \cdot 220\,000 = 132\,000$

a) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 4\,000(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}06) = 16\,600$
Laufzeit bei bekanntem Barwert:
$$r_J = -\frac{\ln[1 - \frac{132\,000}{16\,600} \cdot 0{,}06]}{\ln 1{,}06} = 11{,}1274$$
d.h. elf Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten.

b) $K_8 = 132\,000 \cdot 1{,}06^8 - 16\,600 \cdot \dfrac{1{,}06^8 - 1}{0{,}06} = 210\,387{,}95 - 164\,297{,}97 = 46\,089{,}98$
d.h. zu Beginn des neunten Jahres beträgt die Restschuld 46 089,98 €.

c) $46\,089{,}98 \cdot 1{,}025 = 1\,152{,}25 + 46\,089{,}98 = 47\,242{,}23$
d.h. es sind 47 242,23 € zu zahlen.

F-Mathematik-Klausur vom 14.7.2004

Aufgabe 4

Ein Unternehmen hat gegenüber einem Kunden die folgenden drei Forderungen:

Fälligkeitstermin	Betrag
31.03.2006	35 000 GE
30.09.2007	50 000 GE
31.12.2009	25 000 GE

a) Die Wirtschaftsprüfung schlägt vor, die drei Forderungen mit dem Barwert in der Bilanz auszuweisen. Mit welchem Betrag geht dann die Summe der drei Forderungen in die Bilanz zum 31.12.2004 ein? Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

b) Am 30.06.2004 wird eine Änderung der Zahlungsmodalitäten vereinbart. Dem Schuldner soll mehr Zeit zur Rückzahlung gegeben werden. Die Rückzahlung erfolgt nun in zwei Beträgen zum 31.12.2008 und zum 31.12.2010. Dabei soll die zweite Zahlung dreimal so hoch sein wie die erste Zahlung. Bestimmen Sie beide Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 30.06.2004 ist. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wert der Forderungen am 31.12.2004

$$\begin{aligned}
&\frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5} \\
&= 33\,523{,}10 + 45\,481{,}64 + 21\,049{,}33 \\
&= 100\,054{,}07
\end{aligned}$$

d.h. in die Bilanz zum 31.12.2004 gehen die Forderungen mit einem Betrag von 100 054,07 GE ein.

b) Wert der Forderungen am 30.06.2004

$$\begin{aligned}
&\frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\
&= 32\,951{,}45 + 44\,705{,}96 + 20\,687{,}30 \\
&= 98\,344{,}71
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
98\,344{,}71 &= \frac{x}{1{,}035^4 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{3x}{1{,}035^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 0{,}7995 \cdot 3x \\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 2{,}3985 \cdot x \\
98\,344{,}71 &= 3{,}254982 \cdot x \\
x &= 30\,213{,}5957 \text{ bzw. } 3x = 90\,640{,}7870
\end{aligned}$$

d.h. die erste Forderung beträgt 30 213,60 GE und die zweite Forderung beträgt 90 640,80 GE.

Aufgabe 5
Für den Erwerb eines Autos wird folgendes Finanzierungs-Modell angeboten:

- eine Sofortzahlung in Höhe von 5 000 €
- drei Jahre lang monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 200 €
- eine Restzahlung in Höhe von 4 021,20 € drei Jahre nach Erwerb des Autos

a) Berechnen Sie bei einem Jahreszins von 6% den Barwert des Finanzierungs-Modells.

b) Das Finanzierungs-Modell soll umgewandelt werden in zwei gleichwertige Finanzierungs-Modelle (Jahreszins 6%):

1. Modell 1:
   - Sofortzahlung von 4 000 €
   - vier Jahre lang gleich hohe vorschüssige Quartalsraten
   - Restzahlung in Höhe von 4 809,92 € vier Jahre nach Erwerb des Autos

   Wie hoch sind die Quartalsraten?
2. Modell 2:
   Es sollen halbjährlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 1 703,80 € geleistet werden. Wie viele Jahre lang sind die vollen Rückzahlungen zu entrichten?

Lösung zu Aufgabe 5

a) Barwert K_0:
$K_0 = 5\,000 + R_0 + \dfrac{4\,021{,}20}{1{,}06^3} = 5\,000 + R_0 + 3\,376{,}28$
Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 200 \cdot \left(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}06\right) = 2\,478$
$R_0 = 2\,478 \cdot \dfrac{1{,}06^3 - 1}{0{,}06} \cdot \dfrac{1}{1{,}06^3} = 6\,623{,}72$
$K_0 = 5\,000 + 6\,623{,}72 + 3\,376{,}28 = 15\,000$
d.h. der Barwert beträgt 15 000 €.

b) 1. Modell 1: Zuerst bestimmen wir den Barwert R_0 der unterjährlichen Rente:

$$\begin{aligned} 15\,000 &= 4\,000 + R_0 + \frac{4\,809{,}92}{1{,}06^4} \\ 15\,000 &= 4\,000 + R_0 + 3\,809{,}91 \\ R_0 &= 7\,190{,}09 \end{aligned}$$

Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$7\,190{,}09 = r_J \cdot \dfrac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06} \cdot \dfrac{1}{1{,}06^4} \Rightarrow r_J = 2\,075$

Vorschüssige Quartalsraten r_U:
$2\,075 = r_U \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}06\right) \Rightarrow r_U = 500$
d.h. die Quartalsraten betragen 500 €.

2. Modell 2: Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,703{,}80 \cdot \big(2 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}06\big) = 3\,560{,}942$
Laufzeit:
$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{15\,000}{3\,560{,}942} \cdot 0{,}06\right]}{\ln 1{,}06} = 5$
d.h. die Quartalsraten sind fünf Jahre lang zu zahlen.

F-Mathematik-Klausur vom 5.10.2004

Aufgabe 3
Ein Unternehmen möchte zum 1.1.2005 einen Betrag von 200 000 GE investieren. Dazu stehen drei Investitionsalternativen zur Auswahl. Die Rückflüsse werden wie folgt erwartet:

Alternative A:

Datum	Betrag
31.12.2005	80 000 GE
30.06.2006	35 000 GE
31.12.2006	50 000 GE
30.06.2007	50 000 GE

Alternative B:

Datum	Betrag
30.09.2005	50 000 GE
30.06.2006	50 000 GE
31.08.2006	60 000 GE
31.12.2006	60 000 GE

Alternative C:

Datum	Betrag
31.03.2005	30 000 GE
31.12.2005	80 000 GE
30.06.2006	50 000 GE
31.12.2006	55 000 GE

Beurteilen Sie die drei Investitionsalternativen mit der Kapitalwertmethode. Geben Sie eine Rangfolge bezüglich der Vorteilhaftigkeit der Investitionen an. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 4,5% aus.

Lösung zu Aufgabe 3
Kapitalwert der Alternative A:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{80\,000}{1{,}045} + \frac{35\,000}{1{,}045\left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}045\right)} + \frac{50\,000}{1{,}045^2} + \frac{50\,000}{1{,}045^2\left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}045\right)} - 200\,000 \\
&= 76\,555{,}02 + 32\,755{,}82 + 45\,786{,}50 + 44\,778{,}97 - 200\,000 \\
&= 199\,876{,}31 - 200\,000 \\
&= -123{,}69
\end{aligned}$$

Kapitalwert der Alternative B:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \frac{50\,000}{1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}045} + \frac{50\,000}{1{,}045\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{60\,000}{1{,}045\left(1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{60\,000}{1{,}045^2} - 200\,000 \\
&= 48\,367{,}59 + 46\,794{,}02 + 55\,743{,}95 + 54\,943{,}80 - 200\,000 \\
&= 205\,849{,}36 - 200\,000 \\
&= +5\,849{,}36
\end{aligned}
$$

Kapitalwert der Alternative C:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \frac{30\,000}{1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}045} + \frac{80\,000}{1{,}045} + \frac{50\,000}{1{,}045\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{55\,000}{1{,}045^2} - 200\,000 \\
&= 29\,666{,}26 + 76\,555{,}02 + 46\,794{,}02 + 50\,365{,}15 - 200\,000 \\
&= 203\,380{,}45 - 200\,000 \\
&= +3\,380{,}45
\end{aligned}
$$

d.h. am vorteilhaftesten ist Alternative B gefolgt von Alternative C, nicht vorteilhaft ist Alternative A.

Aufgabe 4

Eine Familie mit 60 000 € Eigenkapital kauft ein Haus für 250 000 €. Für den fehlenden Betrag nimmt sie einen Kredit auf. Für den Kredit vereinbart sie folgende Rückzahlung:

Für die ersten zehn Jahre Prozent-Annuitätentilgung mit

- 5,1% Jahreszins
- 3% erster Tilgungssatz

anschließend neue Prozent-Annuitätentilgung mit

- 4,9% Jahreszins
- 2% erster Tilgungssatz der neuen Prozent-Annuitätentilgung

a) Wie hoch ist die erste Annuität?

b) Wie hoch ist die Restschuld am Ende des 10. Jahres?

c) Wie hoch ist die Annuität am Ende des 11. Jahres?

d) In welchem Jahr nach Kreditaufnahme erfolgt die letzte volle Rückzahlung?

e) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Lösung zu Aufgabe 4

Kredit $= 250\,000 - 60\,000 = 190\,000$

a) $A_1 = (0{,}03 + 0{,}051)\cdot 190\,000 = 15\,390$
d.h. die erste Annuität beträgt 15 390 €.

b) $K_{10} = 190\,000 \cdot 1{,}051^{10} - 15\,390 \cdot \dfrac{1{,}051^{10}-1}{0{,}051} = 117\,970{,}49$
d.h. die Restschuld nach zehn Jahren beträgt 117 970,49 €

c) $A_{11} = (0{,}02 + 0{,}049) \cdot 117\,970{,}49 = 8\,139{,}96$
d.h. die elfte Annuität beträgt 8 139,96 €.

d) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{117\,970{,}49}{8\,139{,}96} \cdot 0{,}049\right]}{\ln 1{,}049} = 25{,}89$
d.h. am Ende des 35. Jahres erfolgt die letzte volle Rückzahlung.

e) $K_{25} = 117\,970{,}49 \cdot 1{,}049^{25} - 8\,139{,}96 \cdot \frac{1{,}049^{25}-1}{0{,}049} = 6\,903{,}03$
$6\,903{,}03 \cdot 1{,}049 = 7\,241{,}28$
d.h. die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt 7 241,28 €.

F-Mathematik-Klausur vom 16.4.2004

Aufgabe 1
Die Wucher-Kredit GmbH verleiht Kapital zu einem nominellen Jahreszinsfuß von 20%, wobei sie die anfallenden Kreditzinsen am Ende eines jeden Vierteljahres der Schuld zuschlägt (unterjährliche Verzinsung zum relativen Zins). Ein Privatmann hat bei dieser Gesellschaft am 30. Juni 2003 ein Darlehen über 100 000 € aufgenommen, das er am 31.12.2007 zurückzahlen muss.

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszinsfuß dieses Darlehens?

b) Wie hoch ist der Betrag, den der Privatmann am Ende der Laufzeit an die Wucher-Kredit-GmbH zurückzahlen muss?

c) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden des Privatmanns zum ersten Mal die 200 000 € Grenze?

d) Angenommen dem Privatmann fließen am 30.9.2005 aus unbekannter Quelle 50 000 € zu, die er unmittelbar an die Wucher-Kredit-GmbH weitergibt, um seinen Rückzahlungsbetrag am 31.12.2007 zu reduzieren. Wie hoch werden seine Schulden am Ende der Laufzeit dann noch sein?

Aufgabe 2
Jemand zahlt bei 4% Zinsen p.a. im Zeitraum vom 1.1.2000 bis 31.12.2005 jeweils zu Beginn eines Monats 200 € und im Zeitraum vom 1.1.2006 bis 31.12. 2008 jeweils zu Beginn eines Quartals 750 € auf ein Konto ein.

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2005?

b) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2008?

c) Wie oft kann er anschließend eine regelmäßige jährliche vorschüssige Rente über 2000 € beziehen, deren erster Betrag fällig ist am 1.1.2011?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}2}{4}\right)^4 = 100\,000 \cdot 1{,}05^4 = 100\,000 \cdot 1{,}2155 = 121\,550,63$
d.h. der effektive Jahreszins beträgt 21,55%.

b) Laufzeit:

2003	2 Quartale
2004	4 Quartale
2005	4 Quartale
2006	4 Quartale
2007	4 Quartale
$\sum$	18 Quartale = 4,5 Jahre

$$K_{4,5} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{4 \cdot 4,5} = 100\,000 \cdot 1,05^{18} = 240\,661,92$$

d.h. er muss 240 661,92 € zurückzahlen.

c) n= Laufzeit in Jahren =?

$$\begin{array}{rcll} 200\,000 & = & 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{4 \cdot n} & \mid \div 100\,000 \\ 2 & = & 1,05^{4 \cdot n} & \mid \text{Logarithmus} \\ 4 \cdot n & = & \log_{1,05} 2 & \mid \text{Umrechnungsformel} \\ 4 \cdot n & = & \dfrac{\ln 2}{\ln 1,05} = 14,207 & \mid \div 4 \\ n & = & 3,55 & \end{array}$$

d.h. nach vier vollen Jahren wird erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten.

d) Die Rückzahlung über 50 000 GE wird $2\frac{1}{4}$ Jahre nach Kreditaufnahme getätigt.

$$240\,661,92 - 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{4 \cdot 2,25} = 240\,661,92 - 50\,000 \cdot 1,05^{9} = 163\,095,51$$

d.h. er muss 163 095,51 zurückzahlen.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $r_J = 200(12 + 6,5 \cdot 0,04) = 2\,452$

$$R_6 = 2\,452 \cdot \frac{1,04^6 - 1}{0,04} = 16\,264,06$$

d.h. der Kontostand am 31.12.2005 beträgt 16 264,06 €.

b) $16\,264,06 \cdot 1,04^3 = 18\,294,85$

$r_J = 750(4 + 2,5 \cdot 0,04) = 3\,075$

$$R_3 = 3075 \cdot \frac{1,04^3 - 1}{0,04} = 9598,92$$

$K_9 = 18\,294,85 + 9598,92 = 27\,893,77$

d.h. das Guthaben am 31.12.2008 beträgt 27 893,77 €.

c) $27\,893,77 \cdot 1,04^2 = 30\,169,90$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,169,90}{1,04 \cdot 2\,000} \cdot 0,04\right]}{\ln 1,04} = 22,13$$

d.h. 22 Jahre lang können die vollen Beträge ausgezahlt werden.

F-Mathematik-Klausur vom 4.2.2004

Aufgabe 1
Ein Klein-Sparer verfügt über 2 000 €, die er möglichst hoch verzinst anlegen möchte.

a) Eine Anlage-Alternative besteht im Kauf von Bundesschatzbriefen vom Typ B mit einer Laufzeit von 7 Jahren, jährlich steigenden Zinsen und Zuschlag der Zinsen und Zinseszinsen am Ende des Jahres. Die jährliche Verzinsung der Bundesschatzbriefe verläuft wie folgt: 1. Jahr 3,25%, 2. Jahr 4,25%, 3. Jahr 4,75%, 4. Jahr 5,2%, 5. Jahr 5,75%, 6. Jahr 6,25% und 7. Jahr 6,5%.

   1. Welchen Betrag kann sich der Klein-Sparer nach 7 Jahren auszahlen lassen?
   2. Mit welchem einheitlichen Zinssatz müsste das Anfangskapital von 2 000 € verzinst werden, damit der Sparer nach 7 Jahren über dasselbe Endkapital wie unter Teilaufgabe 1. verfügen könnte?

b) Als Alternative könnte der Klein-Sparer das Kapital von 2 000 € auch in 90-Tage-Festgelder mit einer Laufzeit von 5 Jahren bei seiner Hausbank anlegen, die ihm derzeit eine nominelle jährliche Verzinsung von 5,5% anbietet. Nach jeweils 90 Tagen (vierteljährliche Verzinsung zum relativen Zins) werden die Zinsen dem Konto gutgeschrieben.

   1. Über welchen Betrag könnte der Klein-Sparer nach 5 Jahren verfügen?
   2. Wie hoch ist der Effektivzins?

c) Für welche Anlage-Alternative (Bundesschatzbrief oder 90-Tage-Festgeld) wird der Sparer sich entscheiden, wenn als einziges Kriterium die Höhe der Effektivverzinsung herangezogen wird? (Hinweis: Die Effektivverzinsung der Bundesschatzbriefe bezieht sich auf die gesamte Laufzeit von 7 Jahren.)

Aufgabe 2
Eine Familie hat ein Haus für 300 000 € gekauft. Sie hat für die Finanzierung am 1.1.2000 einen Kredit über 200 000 € bei 4,2% Zinsen p.a. aufgenommen.

a) Die Familie bezahlt den Kredit binnen 20 Jahren mittels Annuitätentilgung zurück. Die erste Annuität ist fällig am 31.12.2000.

   1. Wie hoch sind die Annuitäten?
   2. Unerwartet wird am 1.1.2010 ein zusätzlicher Rückzahlungsbetrag über 30 000 € eingezahlt. Auf welchen Wert reduzieren sich auf Grund der Rückzahlung anschließend die Annuitäten?

b) Die Familie bezahlt den Kredit jeweils zum Ende eines Quartals mit Beträgen in Höhe von 3 000 € zurück. Der erste Betrag ist fällig am 31.3.2000. In welchem Kalenderjahr ist die letzte volle Quartalsrate fällig?

Lösung von Aufgabe 1:

a) 1. $$\begin{aligned} K_7 &= 2\,000 \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}0425 \cdot 1{,}0475 \cdot 1{,}052 \cdot 1{,}0575 \cdot 1{,}0625 \cdot 1{,}065 \\ &= 2\,000 \cdot 1{,}419\,367 \\ &= 2\,838{,}74 \end{aligned}$$

d.h. das Guthaben beträgt 2 838,74 €.

2. $$\sqrt[7]{\frac{2\,838{,}74}{2\,000}} = 1{,}0513$$

d.h. der Zins beträgt 5,13% p.a. (Effektiv-Zins)

oder

$$\sqrt[7]{1{,}419\,376} = 1{,}0513$$

b) 1. $$K_5 = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}055}{4}\right)^{4\cdot 5} = 2\,000 \cdot 1{,}01375^{20} = 2\,628{,}13$$

d.h. das Guthaben beträgt 2 628,13 €.

2. $1{,}01375^4 = 1{,}0561$

d.h. der Zins beträgt 5,61% p.a.

c) Bundesschatzbrief: 5,13% p.a.

90-Tage-Festgeld: 5,61% p.a. ← höher

d.h. der Sparer wird sich für das 90-Tage-Festgeld entscheiden.

Lösung von Aufgabe 2:

a) $$A = 200\,000 \cdot 1{,}042^{20} \cdot \frac{0{,}042}{1{,}042^{20} - 1} = 14\,978{,}15$$

1. d.h. die Annuitäten betragen 14 978,15 €.

2. $K_{10} = 200\,000 \cdot 1.042^{10} - 14\,978{,}15 \cdot \frac{1{,}042^{10} - 1}{0{,}042} = 120\,285{,}60$

$120\,285{,}60 - 30\,000 = 90\,285{,}60$

$$A = 90\,285{,}60 \cdot 1{,}042^{10} \cdot \frac{0{,}042}{1{,}042^{10} - 1} = 11\,242{,}50$$

d.h. die restlichen zehn Annuitäten betragen 11 242,50 €.

b) $r_j = 3\,000 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,189$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{12\,189} \cdot 0{,}042\right]}{\ln 1{,}042} = 28{,}4$$

1.1.2000 bis 31.12.2009 = 10 Jahre

1.1.2010 bis 31.12.2019 = 10 Jahre

1.1.2020 bis 31.12.2027 = 8 Jahre (Restschuld 4 737,07)

d.h. im Jahr 2028 ist die letzte volle Quartalsrate über 3 000 € fällig.

F-Mathematik-Klausur vom 29.9.2003

Aufgabe 2
Ein Beamter, der ein monatlich vorschüssiges Gehalt von 4000 € bezieht, wird nach seiner Pensionierung davon 75% als monatlich vorschüssiges Ruhegehalt bekommen.

a) Welchen Barwert hat diese Ruhegehaltszahlung, wenn davon ausgegangen wird, dass der Beamte die Zahlungen genau 10 Jahre erhält und ein Jahreszins von 4% zu Grunde gelegt wird?

b) Berechnen Sie den Barwert der Ruhegehaltszahlung, wenn von seinem monatlich vorschüssigen Gehalt von 4000 € nach seiner Pensionierung nur 70% als Ruhegehalt gewährt werden (monatlich vorschüssig, Laufzeit 10 Jahre, Jahreszins 4%).

c) Berechnen Sie den Barwert der Ruhegehalzszahlung, wenn nach der Pensionierung für das erste Jahr 75%, für das zweite Jahr 74%, für das dritte Jahr 73%, für das vierte Jahr 72%, für das fünfte Jahr 71% und für das sechste bis zehnte Jahr 70% seines derzeitigen Gehaltes von 4000 € gewährt werden (monatlich vorschüssig, Laufzeit 10 Jahre, Jahreszins 4%).

Lösung:

a) Unterjährliche Rente r_U:
$r_U = 4000 \cdot 0{,}75 = 3000$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 3000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 3000 \cdot 12{,}26 = 36\,780$
Barwert der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente:
$$R_0 = 36\,780 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} = 36\,780 \cdot 8{,}1109 = 298\,318{,}75$$
d.h. der Barwert beträgt 298 318,75 €.

b) Unterjährliche Rente r_U:
$r_U = 4000 \cdot 0{,}70 = 2800$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 2800 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 34\,328$
Barwert der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente:
$$R_0 = 34\,328 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} = 34\,328 \cdot 8{,}1109 = 278\,430{,}83$$
d.h. der Barwert beträgt 278 430,83 €.
oder
$$\frac{0{,}70}{0{,}75} \cdot 298\,318{,}75 = 278\,430{,}83$$

c)

Zeit	monatlich vorschüssige Rente	nachschüssige jährliche Ersatzrente
1. Jahr	$4000 \cdot 0{,}75 = 3000$	$3000 \cdot 12{,}26 = 36\,780{,}00$
2. Jahr	$4000 \cdot 0{,}74 = 2960$	$2960 \cdot 12{,}26 = 36\,289{,}60$
3. Jahr	$4000 \cdot 0{,}73 = 2920$	$2920 \cdot 12{,}26 = 35\,799{,}20$
4. Jahr	$4000 \cdot 0{,}72 = 2880$	$2880 \cdot 12{,}26 = 35\,308{,}80$
5. Jahr	$4000 \cdot 0{,}71 = 2840$	$2840 \cdot 12{,}26 = 34\,818{,}40$
6. - 10. Jahr	$4000 \cdot 0{,}70 = 2800$	$3000 \cdot 12{,}26 = 34\,328{,}00$

Barwert:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{36\,780}{1{,}04} + \frac{36\,289{,}60}{1{,}04^2} + \frac{36\,799{,}20}{1{,}04^3} + \frac{35\,308{,}80}{1{,}04^4} + \frac{34\,818{,}40}{1{,}04^5} \\ &\quad + 34\,328 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} \\ &= 159\,542{,}8 + 125\,608{,}67 \\ &= 285\,151{,}47 \end{aligned}$$

d.h. der Barwert beträgt 285 151,47 €.

Aufgabe 3

Ein Haus steht für 300 000 € zum Verkauf. Eine Familie möchte dieses Haus erwerben und nimmt dazu einen Kredit unter den folgenden Bedingungen auf:

- 100 000 € Eigenkapital werden eingesetzt
- Annuitäten-Tilgung in Höhe von 16 000 €
  Der erste Rückzahlungsbetrag ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme
- Zinsen betragen 7% p.a.

a) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen?

b) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das 27. Jahr an.

Lösung:

Kredit = Kaufpreis − Eigenkapital = 300 000 − 100 000 = 200 000

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{16\,000} \cdot 0{,}07\right]}{\ln 1{,}07} = 30{,}7$

d.h. es sind 30 volle Annuitäten zu zahlen.

b) $K_{30} = 200\,000 \cdot 1{,}07^{30} - 16\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^{30} - 1}{0{,}07} = 11\,078{,}43$

$11\,078{,}43 \cdot 1{,}07 = 11\,853{,}92$

d.h. ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt die Restschuld 11 853,92 €.

c) Restschuld am Ende des 26. Jahres:

$$K_{26} = 200\,000 \cdot 1{,}07^{26} - 16\,000 \cdot \frac{1{,}07^{26} - 1}{0{,}07} = 62\,647{,}06$$

$Z_{27} = K_{26} \cdot 0{,}07 = 4\,385{,}29$

$T_{27} = A - Z_{27} = 11\,614{,}71$

$K_{27} = K_{26} - T_{27} = 51\,032{,}35$

Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
27	4 385,29	11 614,71	16 000	51 032,35

F-Mathematik-Klausur vom 14.7.2003

Aufgabe 3:
Ein Kredit über 50 000 € soll in fünf Jahren bei 7% Zins p.a. getilgt werden. Der erste Rückzahlungsbetrag ist fällig ein Jahr nach Kapitalaufnahme.

a) Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn mit gleich großen Tilgungsraten zurückgezahlt wird?

b) Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn mit gleich großen Annuitäten zurückgezahlt wird?

c) Berechnen Sie den Barwert aller jährlichen Belastungen (Annuität) bei der Raten- bzw. Annuitätentilgung.

d) Berechnen Sie den Barwert aller jährlichen Zinszahlungen bei der Raten- bzw. Annuitätentilgung.

Aufgabe 4:
Bei 4% Zinseszins pro Jahr werden auf ein Konto folgende Beträge eingezahlt:

- 2 000 € am 1.1.2003
- 4 000 € am 1.1.2005
- 6 000 € am 1.1.2008

a) Aus dem angesparten Guthaben sollen ab 1.1.2010 jeweils zu Beginn des Jahres regelmäßig 1 000 € abgehoben werden. Wie lange können die vollen Beträge abgehoben werden?

b) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 1.1.2010 eine monatliche Rente über 90 € fällig jeweils zu Beginn eines Monats bezogen werden. Wie hoch ist das Restguthaben am 31.12.2027?

c) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 1.1.2010 eine ewige Rente fällig jeweils zu Beginn des Jahres bezogen werden. Wie hoch ist diese ewige Rente?

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $T = \dfrac{50\,000}{5} = 10\,000$

Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	3 500	10 000	13 500	40 000
2	2 800	10 000	12 800	30 000
3	2 100	10 000	12 100	20 000
4	1 400	10 000	11 400	10 000
5	700	10 000	10 700	0

b) $A = 50\,000 \cdot 1{,}07^5 \cdot \dfrac{0{,}07}{1{,}07^5 - 1} = 12\,194{,}54$

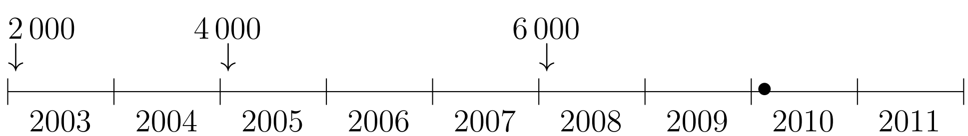
Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	3 500	8 694,54	12,194,54	41 305,47
2	2 891,38	9 303,16	12 194,54	32 002,31
3	2 240,16	9 954,38	12 194,54	22 047,93
4	1 543,36	10 651,19	12 194,54	11 396,75
5	797,77	11 396,77	12 194,54	≈ 0

c) Ratentilgung $K_0 = 50\,000$
Annuitätentilgung $K_0 = 50\,000$

d) Ratentilgung $Z_0 = \dfrac{3\,500}{1{,}07} + \ldots + \dfrac{700}{1{,}07^5} = 8\,998{,}03$

Annuitätentilgung $Z_0 = \dfrac{3\,500}{1{,}07} + \ldots + \dfrac{797{,}77}{1{,}07^5} = 9\,371{,}33$

Lösung zu Aufgabe 4:
Guthaben am 1.1.2010



$2000 \cdot 1{,}04^7 + 4000 \cdot 1{,}04^5 + 6000 \cdot 1{,}04^2 = 13\,988{,}08$

a) $r \cdot q = 1\,000 \cdot 1{,}04 = 1\,040$

$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{13\,988{,}08}{1\,040} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 19{,}7$

d.h. volle Beträge 19 Jahre lang.

b) $r_j = 90(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 1\,103{,}40$

$13\,988{,}08 \cdot 1{,}04^{18} - 1\,103{,}40 \cdot \frac{1{,}04^{18}-1}{0{,}04} = 40{,}15$

d.h. am 31.12.2027 beträgt das Restguthaben 40,15 €

c) $R_0 = 13\,988{,}08$

$13\,988{,}08 \cdot 0{,}04 = 559{,}59$ ewige nachschüssige Rente

$\dfrac{559{,}59}{1{,}04} = 538$

d.h. die ewige vorschüssige Rente beträgt 538 €

Lösung zu Aufgabe 5:

a) x_1 = produzierte ME von Gut P_1
x_2 = produzierte ME von Gut P_2

x_3 = produzierte ME von Gut P_3

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 2x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ \text{II} & x_1 + 2x_3 & \leq & 250 \\ \text{III} & x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 100 \end{array}$$

$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \stackrel{!}{=}$ minimal $;x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) Start-Tableau des Simplex-Algorithmus

1	x_1	x_2	x_3	
e_1	2	1	0	150
e_2	1	0	2	250
e_3	-1	$\boxed{-1}$	-1	-100
	2	5	8	0

c) Simplex-Algorithmus:

2	x_1	e_3	x_3	
e_1	$\boxed{1}$	1	-1	50
e_2	1	0	2	250
x_2	1	-1	1	100
	-3	5	3	-500

Basislösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ \hline 50 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$

3	e_1	e_3	x_3	
x_1	1	1	-1	50
e_2	-1	-1	3	200
x_2	-1	-2	2	50
	3	8	0	-350

Basislösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Die Basislösung des 3. Tableaus ist gleichzeitig auch die optimale Lösung.

d) Steht im Endtableau eines Simplex-Algorithmus in der Zielfunktionszeile eine Null, so ist die optimale Lösung nicht eindeutig.

F-Mathematik-Klausur vom 25.4.2003

Aufgabe 1

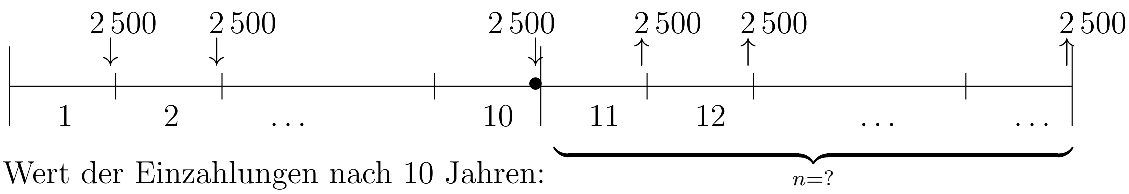
a) Wie lange kann ein Sparer, der zehn Jahre lang jeweils zum Jahresende 2 500 € eingezahlt hat, den gleichen Betrag jeweils wieder am Ende des Jahres abheben (die erste Abhebung liegt ein Jahr nach der letzten Einzahlung), wenn die Bank einen Zins von 4,5% p.a. gewährt? (Anzugeben ist die Anzahl der vollen Abhebungen)

b) Welche vorschüssigen monatlichen Einzahlungen muss man leisten, um am Ende des Jahres den Jahresbetrag von 2 500 € zu erreichen? (Zins 4,5% p.a.)

c) Ein anderer Sparer baut ein Guthaben zu gleichen Konditionen wie oben (also 2 500 € jährlich nachschüssig zu 4,5% Zins p.a.) über sechzehn Jahre auf. Welchen Betrag darf der Sparer zum Ende des 16. Jahres abheben, damit er sofort anschließend 20-mal zum Jahresende 2 500 € abheben kann? (Zins 4,5% p.a.)

Lösung:

a) Einzahlungen und Auszahlungen:



Wert der Einzahlungen nach 10 Jahren:

$$R_{10} = 2\,500 \cdot \frac{1{,}045^{10} - 1}{0{,}045} = 30\,720{,}52$$

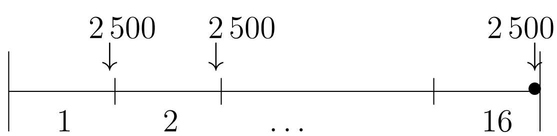
Laufzeit der Rückzahlungen:

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,720{,}52}{2\,500} \cdot 0{,}045\right]}{\ln 1{,}045} = 18{,}29$$

d.h. volle Rückzahlungen können 18 Jahre lang erfolgen.

b) $2\,500 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}045) \Rightarrow r_M = 203{,}38$
d.h. monatlich sind 203,38 € einzuzahlen.

c) Einzahlungen:



Wert der Einzahlungen nach 16 Jahren:

$$R_{16} = 2\,500 \cdot \frac{1{,}045^{16} - 1}{0{,}045} = 56\,798{,}34$$

Rückzahlung x

Barwert der Rückzahlungen:

$56\,798{,}34 - x = 2\,500 \cdot \dfrac{1{,}045^{20} - 1}{0{,}045} \cdot \dfrac{1}{1{,}045^{20}} = 32\,519{,}84 \Rightarrow x = 24\,278{,}50$

d.h. er darf 24 278,50 € abheben.

F-Mathematik-Klausur vom 10.2.2003

Aufgabe 1
Für eine Hausrenovierung wurde ein Kredit von 25 000 € bei einem Zinssatz von 6,5% (p.a.) aufgenommen.
Die Laufzeit soll 30 Jahre betragen.

a) Berechnen Sie die Annuität für die vertraglich festgelegte Annuitätentilgung sowie die zugehörigen monatlichen, vorschüssig zu zahlenden Raten.

Nach 16 Jahren wird der Zinssatz auf 7,5% (p.a.) angehoben.

b) Wie ändert sich die Annuität, wenn die Gesamtlaufzeit von 30 Jahren eingehalten werden soll?

c) Wie lange sind nach den 16 Jahren noch volle Annuitäten zu zahlen, wenn, alternativ zu b), die ursprüngliche Annuität beibehalten wird?

Lösung:

a) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

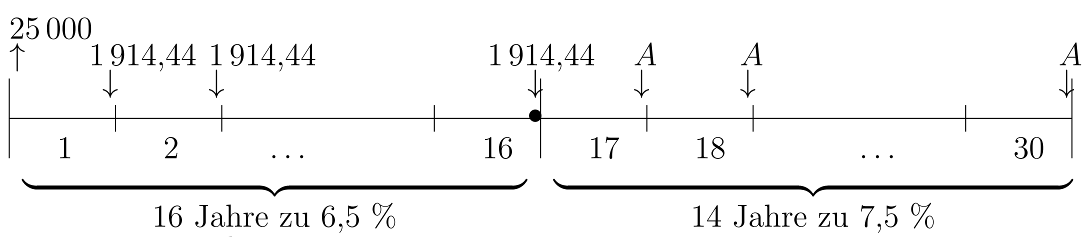
$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 25\,000 \cdot 1{,}065^{30} \cdot \frac{0{,}065}{1{,}065^{30}-1} = 1\,914{,}44$$

$$r_j = r_u \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i \right)$$

$1\,941{,}44 = r_u\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) \Rightarrow r_u = 154{,}11$

d.h. die jährliche Annuität beträgt 1 914,44 € und die monatlich vorschüssige Rate beträgt 154,11 €.

b) Zuerst müssen wir die Restschuld berechnen, die mit den neuen Annuitäten zurückgezahlt werden soll.



$$K_k = K_0 \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

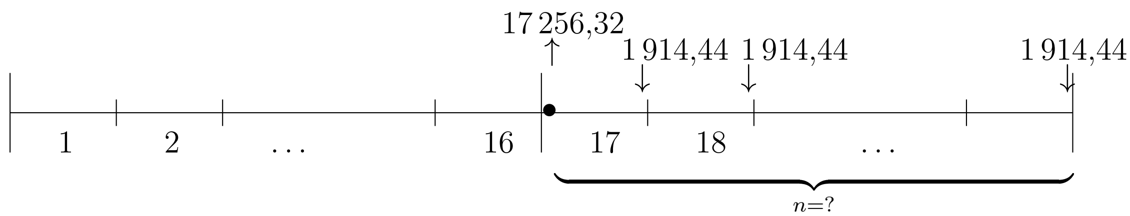
$$K_{16} = 25\,000 \cdot 1{,}065^{16} - 1\,914{,}44 \cdot \frac{1{,}065^{16} - 1}{0{,}065} = 17\,256{,}32$$

Jetzt können wir aus der Restschuld die neue Annuität für die letzten 14 Jahre berechnen.

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 17\,256{,}32 \cdot 1{,}075^{14} \cdot \frac{0{,}075}{1{,}075^{14}-1} = 2\,032{,}75$$

d.h. nach 16 Jahren erhöht sich die Annuität auf 2 032,75 €.

c) Wir haben folgende Zahlungsströme:



$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{K_0}{A} \cdot (q-1)\right]}{\ln q} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{17\,256{,}32}{1\,914{,}44} \cdot 0{,}075\right]}{\ln 1{,}075} = 15{,}6$$

d.h. es sind noch 15 Jahre volle Annuitäten zu zahlen.

F-Mathematikklausur vom 2.10.2002

Aufgabe 4
Frau X. und Herr Y. wollen ein Darlehn zu 6% Zinseszins p.a. aufnehmen, um ein Haus zu kaufen. Das Darlehn möchten sie in zwanzig Jahren abgezahlt haben.

a) Für die Rückzahlung des Darlehns kann das Paar 1 500 Euro am Ende eines jeden Monats aufbringen. Die erste Rückzahlung ist fällig einen Monat nach Darlehnsaufnahme. Wie hoch ist der Darlehnsbetrag?

b) Auf Grund von staatlichen Zuschüssen muss das Paar nur einen Kredit über 180 000 Euro aufnehmen. Wie hoch ist der jeweilige Rückzahlungsbetrag zu Beginn eines Monats, wenn die erste Rückzahlung fällig ist bei Darlehnsaufnahme?

Aufgabe 5
Eine Bank bietet einem Unternehmen zur Finanzierung einer Investition einen Kredit in Höhe von 100 000 GE in zwei Alternativen an.

Alternative 1

- Zins 6,15% p.a.
- jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe von 20 000 GE

Alternative 2

- Zins 6,15% p.a.
- 1. - 3. Jahr: jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe von 20 000 GE
- 4. - 8. Jahr: jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe, so dass die Schuld am Ende des 8. Jahres vollständig getilgt ist

a) Stellen Sie für beide Alternativen den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste und das vierte Jahr auf.

b) Das Unternehmen entscheidet sich für Alternative 1.

   Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Und wie groß ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) Das Unternehmen entscheidet sich für Alternative 2. Nach Zahlung der dritten Annuität setzt das Unternehmen die Zahlung für das vierte Jahr aus. Zur Kompensation wird eine Erhöhung der Annuitäten für das fünfte bis achte Jahr vereinbart. Wie hoch sind jetzt die gleich bleibenden Annuitäten der letzten vier Jahre?

Lösung zu Aufgabe 4:
$p = 6\%$
$n = 20$ Jahre

a) Berechnung der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,500(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}06) = 18\,495$
Berechnung des Rentenbarwerts:
$R_0 = 18\,495 \cdot \frac{1{,}06^{20}-1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^{20}} = 212\,136{,}19$
d.h. das Paar kann einen Kredit über 212 136,19 Euro aufnehmen.

b) Berechnung der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente r_J:
$$\begin{aligned} 180\,000 &= r_J \cdot \tfrac{1{,}06^{20}-1}{0{,}06} \cdot \tfrac{1}{1{,}06^{20}} \\ 180\,000 &= r_J \cdot 11{,}4699 \\ 15\,693{,}22 &= r_J \end{aligned}$$
Berechnung der vorschüssigen monatlichen Rente r_M:
$r_J = r_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}06) = r_M \cdot 12{,}39 \Rightarrow r_M = 1\,266{,}60$
d.h. der monatliche vorschüssige Rückzahlungsbetrag beträgt 1 266,60 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Alternative 1

Jahr	Schuld zu Beginn d.J.	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	100 000	6 150	13 850	20 000	86 150
4	55 842,30	3 434,30	16 565,70	20 000	39 276,60

Alternative 2
$$A = 55\,842{,}30 \cdot 1{,}0615^5 \cdot \frac{0{,}0615}{1{,}0615^5 - 1} = 13\,310{,}90$$

Jahr	Schuld zu Beginn d.J.	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	100 000	6 150	13 850	20 000	86 150
4	55 842,30	3 434,30	9 876,60	13 310,90	45 965,70

b) $a_n = \dfrac{100\,000}{20\,000} = 5$
$n = -\dfrac{\ln[1 - 5 \cdot 0{,}0615]}{\ln 1{,}0615} = 6{,}1566$
d.h. es sind sechs volle Annuitäten zu zahlen.

$$K_6 = 100\,000 \cdot 1{,}0615^6 - 20\,000 \cdot \frac{1{,}0615^6 - 1}{0{,}0615} = 3\,026{,}17$$
$3\,026{,}17 \cdot 1{,}0615 = 3\,212{,}28$
d.h. die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt 3 212,28 GE.

c) Restschuld am Ende des vierten Jahres:
$K_4 = 55\,842{,}29 \cdot 1{,}0615 = 59\,276{,}59$

Berechnung der Höhe der restlichen vier Annuitäten A:

$A = 59\,276{,}60 \cdot 1{,}0615^4 \cdot \dfrac{0{,}0615}{1{,}0615^4 - 1} = 17\,165{,}52$

d.h. die Annuität beträgt 17 165,52 GE.

F-Mathematik-Klausur am 16.7.2002

Aufgabe 4

Zu Beginn der Jahre 2009, 2012 und 2016 möchte eine Familie jeweils 10 000 Euro ihren Kindern als Ausbildungsbeihilfe zur Verfügung stellen. Für dieses Vorhaben werden ab 1.1.2003 bis 31.12.2015 vorschüssige (gleich hohe) Monatsbeträge auf ein Konto eingezahlt. Die drei Ausbildungsbeihilfen der Jahre 2009, 2012, 2016 werden von diesem Konto abgehoben. Der Zins beträgt 5% (p.a.).

a) Wie hoch müssen die vorschüssigen Monatsbeträge sein?

b) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2008.

c) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2011.

Aufgabe 5

a) Ein Bauherr erhält von der Kreditanstalt für Wiederaufbau einen Baukredit zu folgenden Konditionen angeboten:

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	6,15 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 1,32 %
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

1. Stellen Sie den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste bis vierte Jahr auf.
2. Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Wie hoch ist der ein Jahr nach der letzten vollen Annuität zu zahlende Restbetrag?

b) Auf Grund einer Veränderung am Kapitalmarkt zwischen Beantragung und Auszahlung des Kredits fällt der jährliche Zinssatz. Wie verändern sich die Annuität und der anfängliche Tilgungssatz, wenn von folgenden Konditionen ausgegangen wird?

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	5,95 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Laufzeit:	30 Jahre (inklusive des tilgungsfreien Jahres)
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Wert der Abhebungen am 1.1.2003:

$$\frac{10\,000}{1{,}05^6} + \frac{10\,000}{1{,}05^9} + \frac{10\,000}{1{,}05^{13}} = 19\,211{,}46$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$19\,211{,}46 = r_J \cdot \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^{13}} \Rightarrow r_J = 2\,045{,}17$

Vorschüssige monatliche Rente r_M:
$2\,045{,}17 = r_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) \Rightarrow r_M = 165{,}94$
d.h. die vorschüssigen Monatsrente beträgt 165,95 Euro.

b) $2\,045{,}17 \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 13\,911{,}07$
d.h. der Kontostand am 31.12.2008 beträgt 13 911,07 Euro.

c) $3\,911{,}07 \cdot 1{,}05^3 + 2\,045{,}17 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 10\,974{,}95$
d.h. der Kontostand am 31.12.2011 beträgt 10 974,95 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) 1. $A = (0{,}0615 + 0{,}0132)120\,000 = 7\,380 + 1\,584 = 8\,964$

Jahr	Schuld (JA)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schuld (JE)
1	120 000	7 380	–	7 380	120 000
2	120 000	7 380	1 584	8 964	118 416
3	118 416	7 282,58	1 681,42	8 964	116 734,58
4	116 734,58	7 179,18	1 784,82	8 964	114 949,76

2. $a_n = \frac{120\,000}{8\,964}$

$n = -\frac{\ln\left[1 - a_n \cdot 0{,}0615\right]}{\ln 1{,}0615} = 29{,}04$

d.h. 29 volle Annuitäten

$K_{29} = 120\,000 \cdot 1{,}0615^{29} - 8\,964 \cdot \frac{1{,}0615^{29} - 1}{0{,}0615} = 357{,}57$

$357{,}57 \cdot 1{,}0615 = 379{,}56$

d.h. die Restzahlung beträgt 379,56 GE

b) $A = 120\,000 \cdot 1{,}0595^{29} \cdot \frac{0{,}0595}{1{,}0595^{29} - 1} = 8\,783{,}36$
d.h. die Annuität beträgt 8 783,36
$8\,783{,}36 = 120\,000(0{,}0595 + t) \Rightarrow t = 0{,}0137$
d.h. die anfängliche Tilgung beträgt 1,37 %

F-Mathematik-Klausur Sommersemester 1999

Aufgabe 2

Eine Zahlungsverpflichtung besteht aus zwei zukünftigen Zahlungen: DM 150 000 fällig nach 5 Jahren und DM 100 000 fällig nach 7 Jahren.

Die Zahlungsverpflichtung soll durch

a) eine sofortige Zahlung

b) eine einzige Zahlung am Ende des vierten Jahres

c) zwei gleich große Zahlungen am Ende des 2. und 4. Jahres

abgelöst werden. Welcher Betrag ist jeweils zu zahlen, wenn 6% Zinseszins pro Jahr berechnet werden.

Aufgabe 4

Durch monatliche nachschüssig eingezahlte Beträge von DM 350 möchte jemand seine Pension aufbessern. Er leistet die Einzahlungen vom 31.1.1990 bis zum 31.12.1998 bei einem Zinsfuß von 3, 75% (p.a.). Am 31.12.1997 zahlt er zusätzlich eine erhaltene Treueprämie von DM 16 000 auf dieses Konto ein.

a) Welchen Betrag kann er ab Januar 1999 jeweils zu Beginn eines Monats über einen Zeitraum von 15 Jahren abheben?

b) Unerwartet muß er am 1.1.1999 einen Betrag abheben, der die geplanten monatlichen Abhebungen auf DM 395,92 reduziert. Wie hoch ist der entnommene Betrag?

Lösung zu Aufgabe 2

a) (3 Punkte)

$$K_0 = \frac{150\,000}{1.06^5} + \frac{100\,000}{1.06^7} = 178\,594.44$$

b) (2 Punkte)

$$K_4 = \frac{150\,000}{1.06} + \frac{100\,000}{1.06^3} = 225\,471.36 \quad \text{oder} \quad K_4 = 178\,594.44 \cdot 1.06^4 = 225\,471.36$$

c) (3 Punkte)

$$225\,471.36 = x \cdot 1.06^2 + x = 2.1236\,x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{225\,471.36}{2.1236} = 106\,174.12$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) (5 Punkte)

! Der Zeitraum vom 1.1.1990 bis 31.12.1998 beträgt 9 Jahre

$r_{jährlich} = 350\,(12 + 5.5 \cdot 0.0375) = 4\,272.1875$

$R_9 = 4\,272.1875 \cdot \dfrac{1.0375^9 - 1}{0.0375} = 44\,751.271$

$K_9 = R_9 + 16\,000 \cdot 1.0375 = 44\,751.271 + 16\,600 = 61\,351.27$

$r_{jährlich} = 61\,351.27 \cdot 1.0375^{15} \cdot \dfrac{0.0375}{1.0375^{15} - 1} = 5\,421.9766$

$5\,421.9766 = r_{monatlich} \cdot (12 + 6.5 \cdot 0.0375) \quad \Rightarrow \quad r_{monatlich} = 442.84$

b) (3 Punkte)

$r_{jährlich} = 395.92\,(12 + 6.5 \cdot 0.0375) = 4\,847.5455$

$x = 61\,351.27 - 4\,847.5455 \cdot \dfrac{1.0375^{15} - 1}{0.0375} \cdot \dfrac{1}{1.0375^{15}} = 61\,351.27 - 54\,851.4316 =$
$6\,499.84$

F-Mathematik-Klausur WS 1999/2000

Aufgabe 2
Ein Unternehmen kauft eine Maschine auf Raten. In den Ratenzahlungen ist ein Zinsfuß von 7% pro Jahr enthalten.

a) Das Unternehmen vereinbart, auf die Dauer von sieben Jahren jährlich nachschüssig Kaufpreisraten von je DM 4 000 zu zahlen. Wie hoch ist der Kaufpreis der Maschine?

b) Da Liquiditätsschwierigkeiten auftreten, wird das folgende Umschuldungsmodell erörtert: Das Unternehmen setzt vier Jahre mit der Zahlung aus und zahlt anschließend drei Jahre lang entsprechend höhere nachschüssige Jahresraten. Wie hoch sind diese?

c) Ein anderes Umschuldungsmodell ist das folgende: Das Unternehmen setzt vier Jahre mit der Zahlung aus und zahlt danach jährlich nachschüssig DM 4 000 für eine entsprechend längere Zeit.
Wie viele volle Jahresraten sind zu zahlen? Wie hoch ist die Restzahlung, wenn sie ein Jahr nach der letzten vollen Jahresrate fällig sein soll?

Aufgabe 4
Eine Firma hat eine Schuld von DM 3 Millionen aufgenommen. In den ersten zehn Jahren will sie die Schuld bei gleichen Annuitäten auf ein Drittel der Anfangsschuld tilgen. Der Rest soll in weiteren zwölf Jahren mit gleichen Tilgungsraten beglichen werden. Der vereinbarte Zinsfuß beträgt 6% pro anno.

a) Wie hoch ist die Annuität in den ersten zehn Jahren?

b) Erstellen Sie die Zeilen für das erste bzw. zehnte Jahr des Tilgungsplans.

c) Wie lautet die Tilgungsplan-Zeile für das 22. Jahr?

Lösung zu Aufgabe 2

a) $R_0 = 4\,000 \cdot \dfrac{1,07^7 - 1}{0,07} \cdot \dfrac{1}{1,07^7} = 4\,000 \cdot 5,3893 = 21\,557,16$

b) $R_4 = 21\,557,16 \cdot 1,07^4 = 28\,257,04$

$28\,257,04 = r \cdot \dfrac{1,07^3 - 1}{0,07} \cdot \dfrac{1}{1,07^3} = 2,6243\,r \Rightarrow r = 10\,767,39$

c)
$$\begin{aligned}
28\,257,04 \cdot 1,07^n &= 4\,000 \cdot \tfrac{1,07^n - 1}{0,07} \\
1\,977,99 \cdot 1,07^n &= 4\,000 \cdot 1,07^n - 4\,000 \\
4\,000 &= 2\,022,01 \cdot 1,07^n \\
1,9782 &= 1,07^n \\
n &= \frac{\ln 1,9782}{\ln 1,07} = 10,083
\end{aligned}$$

d.h. zehn volle Raten

Restschuld zum Zeitpunkt der letzten vollen Rate:

$$\begin{aligned} K_{14} &= 21\,557,16 \cdot 1,07^{14} - 4\,000 \cdot \tfrac{1,07^{10}-1}{0,07} \\ &= 55\,585,87 - 55\,265,79 \\ &= 320,08 \end{aligned}$$

Restzahlung ein Jahr nach der letzten vollen Rate: $320,08 \cdot 1,07 = 342,48$

Lö

! Nach zehn Jahren soll die Restschuld auf Grund von Annuitätentilgung eine Million betragen, nach weitern zwölf Jahren soll die Schuld durch Ratentilgung vollständig beglichen sein.

a) $1\,000\,000 = K_{10} = 3\,000\,000 \cdot 1,06^{10} - A \cdot \dfrac{1,06^{10}-1}{0,06}$

$\Rightarrow 4\,372\,542,09 = A \cdot 13,1808 \Rightarrow A = 331\,735,92$

oder $A = (3\,000\,000 - \dfrac{1\,000\,000}{1,06^{10}}) \cdot \dfrac{0,06}{1,06^{10}-1} \cdot 1,06^{10} = 331\,735,92$

b) $Z_1 = 3\,000\,000 \cdot 0,06 = 180\,000$

$T_1 = A - Z_1 = 331\,735,92 - 180\,000 = 151\,735,92$

$T_{10} = T_1 \cdot 1,06^9 = 151\,735,92 \cdot 1,06^9 = 256\,354,64$

$Z_{10} = A - T_{10} = 331\,735,92 - 256\,354,64 = 75\,381,28$

Jahr	*Zinsen am Ende des Jahres*	*Tilgung am Ende des Jahres*	*Annuität am Ende des Jahres*	*Restschuld am Ende des Jahres*
1	*180 000*	*151 735,92*	*331 735,92*	*2 848 264,08*
10	*75 381,28*	*256 354,64*	*331 735,92*	*1 000 000*

c) $T = \dfrac{K_0}{n} = \dfrac{1\,000\,000}{12} = 83\,333,33$

$K_{21} = T = 83\,333,33$

$Z_{22} = K_{21} \cdot 0,06 = 83\,333,33 \cdot 0,06 = 5\,000$

Jahr	*Zinsen am Ende des Jahres*	*Tilgung am Ende des Jahres*	*Annuität am Ende des Jahres*	*Restschuld am Ende des Jahres*
22	*5 000*	*83 333,33*	*88 333,33*	*0*

Lösungen der Klausur vom 8.2.2000

Lösung zu Aufgabe 2

a) $r_Q = 1\,600{,}12$

b) $r'_M = 391$

c) $n = 19{,}22$ *d.h. 19 Jahre lang*

Lösung zu Aufgabe 3

a) 20 volle Annuitäten und Restschuld $K_{20} \cdot q = 45\,770{,}79$

	Jahr	Restschuld zu Beginn d.J.	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Restschuld am Ende d.J.
	1	500 000	40 000	-	40 000	500 000
	2	500 000	40 000	-	40 000	500 000
	3	500 000	40 000	-	40 000	500 000
b)	4	500 000	40 000	-	40 000	500 000
	5	500 000	40 000	10 000	50 000	490 000
	6	490 000	39 200	10 800	50 000	479 200
	⋮					
	24	85 537,37	6 842,99	43 157,01	50 000	42 380,36
	25	42 380,36	3 390,43	42 380,36	45 770,79	0

Lösungen der Klausur vom 27.4.2000

Lösung zu Aufgabe 1

a) 3

b) $(2, -1)$ *lok. Min. und* $(-2, -2)$ *lok. Max.*

$(2, -2)$ *und* $(-2, -1)$ *Sattelstellen*

Lösung zu Aufgabe 2

a) 105 740 *DM*

b) 119 040 *DM bei rel. gemischter Verz.*

119 045,46 DM bei rel. Zinsfuß

c) Barwert von Vorschlag c): 750 420,23 DM

Barwert von Vorschlag b) bei rel. gemischter Verz.: 798 768,09 DM

Barwert von Vorschlag b) bei rel Zinsfuß: 798 804,76 DM

auf jeden Fall ist Vorschlag c) günstiger

Lösung zu Aufgabe 3

a) $n = 20{,}1$ *also 20 volle Annuitäten*

b) $k = 12{,}4$ *also nach 13 Jahren*

c) 2 526,73 DM Restschuld nach 21 Jahren

Lösung zu Aufgabe 4

a) optimale Lösung : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ *mit optimalem Deckungsbeitrag 3 600*

b) der optimale Deckungsbeitrag ändert sich nicht, e_3 *beträgt jetzt lediglich null Einheiten*

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Herr F. hat zu Beginn des Jahres 1993 einen Kredit über DM 30 000 zu 6,5% *Zinseszinsen p.a. aufgenommen, den er mit vorschüssigen Monatsraten in Höhe von DM 184,93 zurückzahlt.*

a) *Wie hoch wäre bei jährlichen statt monatlichen Zahlungen die Annuität?*

b) *Wie lange läuft der Vertrag?*

c) *Anfang Januar 2001 erbt Herr F. überraschend DM 27 000. Wie lautet die Tilgungsplan-Zeile für das Jahr 2000? Und könnte Herr F. mit der Erbschaft auf einen Schlag seine Restschuld Anfang Januar 2001 zurückzahlen?*

Lösungen zur Klausur vom 7.2.2001

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r_{jährlich} = 184{,}93\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) = 2\,297{,}29$

b) $a_n = \dfrac{30\,000}{2\,297{,}29} = 13{,}0588$

$$n = -\frac{\ln[1 - 13{,}0588 \cdot 0{,}065]}{\ln 1{,}065} = 30{,}0012$$

d.h. 30 volle Annuitäten

c) *2000* $\widehat{=}$ *8. Jahr*

$$\begin{aligned} K_7 &= 30\,000 \cdot 1{,}065^7 - 2\,297{,}29 \cdot \tfrac{1{,}065^7 - 1}{0{,}065} = 27\,040{,}09 \\ Z_8 &= K_7 \cdot 0{,}065 = 1\,757{,}61 \\ T_8 &= A - Z_8 \\ K_8 &= K_7 - T_8 \end{aligned}$$

Jahr	*Zinsen a.E.d.J*	*Tilgung a.E.d.J*	*Annuität a.E.d.J*	*Restschuld a.E.d.J*
8	*1 757,61*	*539,67*	*2 297,29*	*26 500,40*

d.h. Herr F. könnte Anfang 2001 mit der Erbschaft von DM 27 000 seine Restschuld von DM 26 500,40 begleichen.

Mathematik-Klausur am 20.4.2001

Aufgabe 2

Herr E. möchte seine Rente, die ihm durch 14 vorschüssige Jahresbeträge von DM 17 200 zukommen soll, in eine nachschüssige Jahresrente über 11 Jahre umwandeln. Die Zinsen betragen 5% p.a.

a) *Wie hoch ist der Barwert der 14-jährigen vorschüssigen Rente?*

b) *Wie hoch sind die neuen Jahresauszahlungen?*

c) *Wie hoch wären monatlich vorschüssig ausgezahlte Beträge über diese 11 Jahre?*

d) *Welchen Betrag könnte Herr E. sofort abheben, wenn die zu Beginn eines jeden Monats fälligen Beträge über diese 11 Jahre nur DM 1 600 betragen sollen?*

Aufgabe 4

Ein Privatanleger investiert ein Kapital von insgesamt 1 000 GE in zwei risikobehaftete Wertpapiere A und B. Der in Wertpapier A investierte Betrag sei x_1, der in Wertpapier B investierte Betrag sei x_2. Das Risiko (gemessen durch die Streuung) der Investition ist gegeben durch die Funktion:

$$R(x_1, x_2) = 0{,}000\,03\, x_1^2 + 0{,}000\,01\, x_2^2 \qquad ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

a) *Wie hoch ist das Risiko, wenn das gesamte Kapital in Wertpapier A investiert wird?*

b) *Wie hoch ist das Risiko, wenn das gesamte Kapital in Wertpapier B investiert wird?*

c) *Bei welcher Aufteilung der Investition in die Wertpapiere A und B ist das Risiko minimal? Wie hoch ist das minimale Risiko?*

Aufgabe 5

Für eine Investition werden m i n d e s t e n s 115 000 DM Fremdkapital benötigt. Es liegen zwei Kreditangebote mit unterschiedlicher Verzinsung und Tilgung vor.

Angebot 1: 6% Zinsen und 2% Tilgung (jeweils pro Jahr)
Angebot 2: 7% Zinsen und 1% Tilgung (jeweils pro Jahr)

Es sind folgende Bedingungen gegeben:

- *im Angebot 1 ist der Kredit auf maximal 80 000 DM beschränkt*
- *die jährliche Belastung soll 10 000 DM nicht überschreiten*

Wie sind die zwei Angebote zu kombinieren, damit unter den gegebenen Bedingungen die Zinsen, die für das erste Jahr gezahlt werden müssen, minimal sind?

Lösung zu Aufgabe 2

a) $R_0 = 17\,200 \cdot 1{,}05 \cdot \dfrac{1{,}05^{14} - 1}{0{,}05} \cdot \dfrac{1}{1{,}05^{14}} = 178\,769{,}46$

b)
$$\begin{aligned} 178\,769{,}46 &= r_J \cdot \tfrac{1{,}05^{11}-1}{0{,}05} \cdot \tfrac{1}{1{,}05^{11}} \\ 178\,769{,}46 &= r_J \cdot 8{,}3064 \\ r_J &= 21\,521{,}86 \end{aligned}$$

c) $21\,521{,}86 = r'_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 12{,}325 r'_M \Rightarrow r'_M = 1\,746{,}20$

d) $r_J = 1\,600(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 19\,720$
$R_0 = 19\,720 \cdot \tfrac{1{,}05^{11}-1}{0{,}05} \cdot \tfrac{1}{1{,}05^{11}} = 163\,802{,}49$

$$\begin{array}{r} 178\,769{,}46 \\ -163\,802{,}49 \\ \hline 14\,966{,}97 \end{array}$$

d.h. Herr E. könnte sofort DM 14 966,97 von seinem Konto abheben.