05.11.18

12 Schätzen von Parametern

12.1 Spezielle Stichprobenfunktionen

Beispiel:

x = Nachbereitungszeit (in h pro Woche) einer Vorlesung

1. Stichprobe: n=12

2,8; 5,3; 4,0; 6,2; 3,4; 6,5

2. Stichprobe: n=8

5,4; 9,1; 0,4; 7,2

3. Stichprobe: n=10

6,5; 7,5; 8,5; 0,0; 3,2

Stichprobe	n	arithm. Mittel	Varianz	Standardabweichung
1	12	4	$4,\overline{3}$	2,08
2	8	4	8	2,83
3	10	5	6,8	2,61

Varianz s^2_x der 2. Stichprobe

$$s^2_x = \frac{1}{8}[25+16+81+1+0+16+49+9] - 4^2 = 8$$

$$s^2_x = \frac{1}{8}[(5-4)^2+(4-4)^2+\ldots+(2-4)^2] = 8$$

~~Varianz s^2_x der 1. Stichprobe~~

$s_x = \sqrt{8} = 2,83h$ = Standardabweichung

12.2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Beispiel:

M | II
J | III

n=5

Anteil d. Mädchengeburten = $\frac{2}{5}$ = 40%.

48,6% Grundgesamtheit Anteil der Mädchengeburten

Je größer der Stichprobenumfang, desto wahrscheinlicher ist es, dass sich der Anteil der Mädchengeburten in der Grundgesamtheit kaum noch unterscheidet

12.3 Schätzer für μ und σ^2

Stichprobe

arithmetische Mittel $\bar{x}$
μ wird durch $\bar{x}$ geschätzt

σ^2 wird durch s^2 σ_{n-1} geschätzt, besser noch durch

$$\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$$

σ_{n-1}

13 Konfidenzintervall = KI

13.1 KI für μ (σ bekannt)

Problem: $\mu = E[x]$ ist unbekannt

Lösung: μ wird durch $\bar{x}$ geschätzt

Frage: ist der Schätzwert ein präziser Schätzwert für μ?

Antwort: Anhand der Stichprobe wird ein KI für μ berechnet, indem μ mit „hoher" Wahrscheinlichkeit (80%. oder 95%. oder 99%.) liegt. Ist das KI schmal, so ist $\bar{x}$ ein guter Schätzwert für μ. Ist das KI hingegen breit, so ist $\bar{x}$ ein schlechter Schätzwert für μ.

Beispiel (Fortsetzung)

x = Nachbereitungszeit
$x \sim N(\mu, \sigma = 2{,}5)$

μ = mittlere Nachbereitungszeit eines Studierenden

0,95 - KI für μ =

$$[4 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}} ; 4 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}}] = [2{,}59; 5{,}41]$$

Breite des KI = Obergrenze minus Untergrenze

$= 5{,}41 - 2{,}59 = 2{,}82$h

d.h. das KI ist breit; d.h. 4h ist ein unpräziser Schätzwert für μ.

$n \uparrow \Rightarrow$ KI schmaler

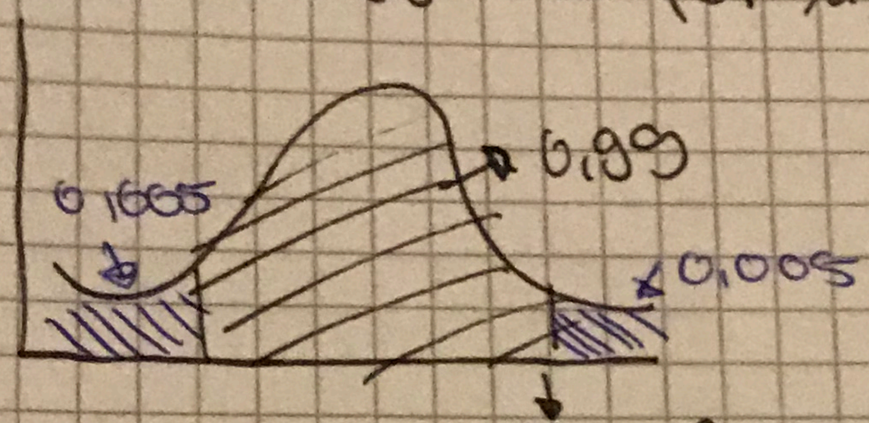
0,95 = Konfidenzniveau $= 1-\alpha$

$(1-\alpha)\downarrow \Rightarrow$ KI

$(1-\alpha)\uparrow \Rightarrow$ KI

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht: 0,99 - KI für μ = ?



$4 \pm 2{,}5758 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}}$

$= [2{,}14 \,;\, 5{,}86]$

d.h. [2,14; 5,86] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich in dem μ mit der Wkt. von 99% liegt.

13.2 KI für μ (6 unbekannt)

Beispiel:

X = Nachbereitungszeit (in h)

Stichprobe: $n = 30$ mit $\bar{x} = 4{,}3$h und $s = 2{,}52$h

μ = mittlere Nachbereitungszeit eines studierenden

Gesucht: 0,90 - KI für μ.

$1-\alpha$	90% Konfidenzniveau
α	10%
$\alpha/2$	5%
$1-\alpha/2$	95%
$u_{1-\alpha/2}$	1,6449

$4{,}3 \pm 1{,}6449 \cdot \frac{2{,}52}{\sqrt{30}} = [5{,}106 \,;\, 3{,}54]$ Konfidenzintervall

Faustregel $n = 30 \geq 30$ erfüllt