QM II am 10.04.2018

3.4 Stetige Verzinsung = Verzinsung des Augenblicks

Hauptaufgabe: Guthaben bei unterjährlicher Verz. zum relativen Zins berechnen, wobei

<u>m</u> = Anzahl der Verz. pro Jahr <u>beliebig</u> <u>groß</u> ist; d.h. die Zeitintervalle, in denen verzinst wird, sind beliebig klein.

Guthaben nach einem Jahr:

$$K_1 = K_0 \underbrace{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}_{m \to \infty} = K_0 \cdot e^i$$

e → Eulersche Zahl

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$$

Nr. F.1.8

Guthaben nach n Jahren bei stetiger Verz.

$\boxed{n \geq 0}$

Beispiel (Aufgabe 5.2 d)

$K_0 = 10\,000$

$n =$ 15 Jahre, 3 Monate

1,2% Jahreszins

stetige Verz.

$$K_n = 10000 \cdot e^{0{,}012 \cdot 15{,}25} = 12008{,}14$$

Beispiel (Aufgabe 5.4)

stetige Verz.

$n =$ 7 Jahre, 2 Monate, 12 Tage $= 7 + \frac{72}{360} = 7{,}2$

$K_n = 2 \cdot K_0$

Jahreszins = ?

$$k_n = \cancel{k_0} \cdot e^{i \cdot 7{,}2} = 2 \cdot \cancel{k_0} \quad | : k_0$$

$$e^{i \cdot 7{,}2} = 2 \quad | \ln$$

$$\ln\left(e^{\boxed{i \cdot 7{,}2}}\right) = \ln 2 \qquad \text{III Log-Gesetz}$$

$$i \cdot 7{,}2 \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln 2$$

$$i \cdot 7{,}2 = \ln 2$$

$$i = \frac{\ln 2}{7{,}2} = 0{,}09627$$

d.h. 9,627 %

---

4 Rentenrechnung

Hauptaufgabe: Guthaben berechnen, das bei gleich hohen regelmäßigen Einzahlungen nach n Jahren entsteht.

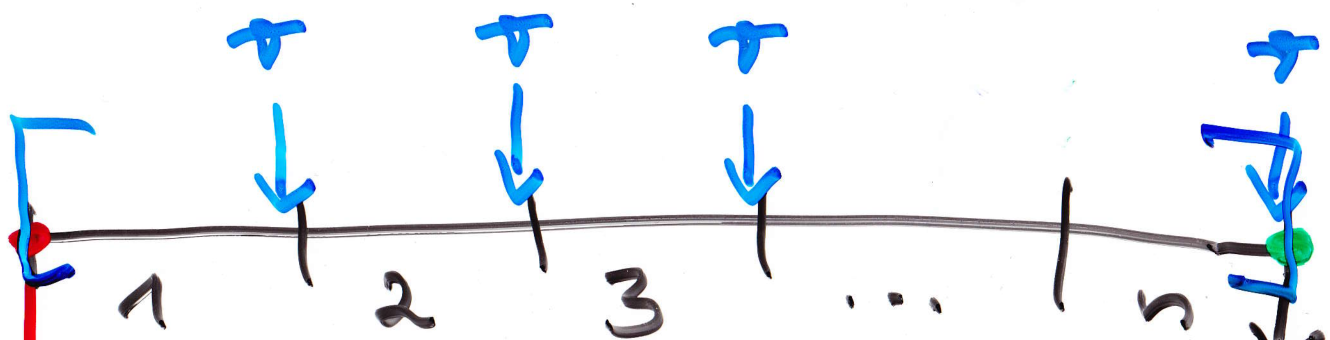
4.1 Jährliche Renten

⚠ nachschüssige Verz.

jährlich nachschüssige Rente; d.h. gleich hohe regelmäßige Zahlungen jeweils am Ende eines Jahres

jährlich vorschüssige Rente; d.h. gleich hohe regelmäßige Zahlungen jeweils zu Beginn eines Jahres

4.1.1 Nachschüssige Jahresrente



$\check{R}_0$

$R_n = ?$

$R_6 = ?$

Jahr	Einz. a.E.d.J.	Guthaben a.E.d.J.
1	r	r
2	r	$r \cdot q + r$
3	r	$r \cdot q^2 + r \cdot q + r$
4	r	$r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$
5	r	$r \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$
6	r	$r \cdot q^5 + r \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$

$$R_6 = \left(r \cdot q^5 + r \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r\right) \cdot \frac{q-1}{q-1}$$

$$r \cdot q^6 \boxed{+ r \cdot q^5} \boxed{+ r \cdot q^4} \boxed{+ r \cdot q^3} \boxed{+ r \cdot q^2} \boxed{+ r q}$$

$$\boxed{- r \cdot q^5} \boxed{- r \cdot q^4} \boxed{- r \cdot q^3} \boxed{- r \cdot q^2} \boxed{- r q} - r$$

$$= \frac{r \cdot q^6 - r}{q - 1} = r \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Nr. F.2.1

Rentenendwert einer nachschl. Jahresrente

Beispiel:

3,4 % Jahreszins

500 € regelmäßige Einzahlung jeweils am Ende eines Jahres

a) Guthaben nach 10 Jahren?

$$R_{10} = 500 \cdot \frac{1{,}034^{10} - 1}{0{,}034} = 5838{,}66$$

b) Barwert der 10-jährigen Rente?

$$R_0 = \frac{5838{,}66}{1{,}034^{10}} = 4179{,}34$$

$$\boxed{R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}}$$

Nr. F. 2.1

Rentenbarwert einer nachschl. Jahresrente

c) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 10 000 € ?

1. Lösungsweg:

$$R_n = 10\,000 = 500 \cdot \frac{1{,}034^n - 1}{0{,}034} \quad \Big| : 500$$

$$20 = \frac{1{,}034^n - 1}{0{,}034} \qquad | \cdot 0{,}034$$

$$0{,}68 = 1{,}034^n - 1 \qquad | +1$$

$$1{,}68 = 1{,}034^n \qquad | \ln$$

$$\ln 1{,}68 = \ln\left(1{,}034^{\boxed{n}}\right)$$

$$\ln 1{,}68 = n \cdot \ln(1{,}034)$$

$$\frac{\ln 1{,}68}{\ln 1{,}034} = n \quad \Leftrightarrow \quad n = 15{,}52$$

d.h. nach 16 Jahren.

2. Lösungsweg:

$$\boxed{n = \frac{\ln\left[1 + \frac{R_n}{r}(q-1)\right]}{\ln q}}$$

Nr. F. 2. 1

Laufzeit einer nachschl. Jahresrente, falls R_n bekannt ist

$$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{10000}{500} \cdot 0{,}034\right]}{\ln 1{,}034} = 15{,}5166\ldots$$

$$\boxed{n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{R_0}{r}(q-1)\right]}{\ln q}}$$

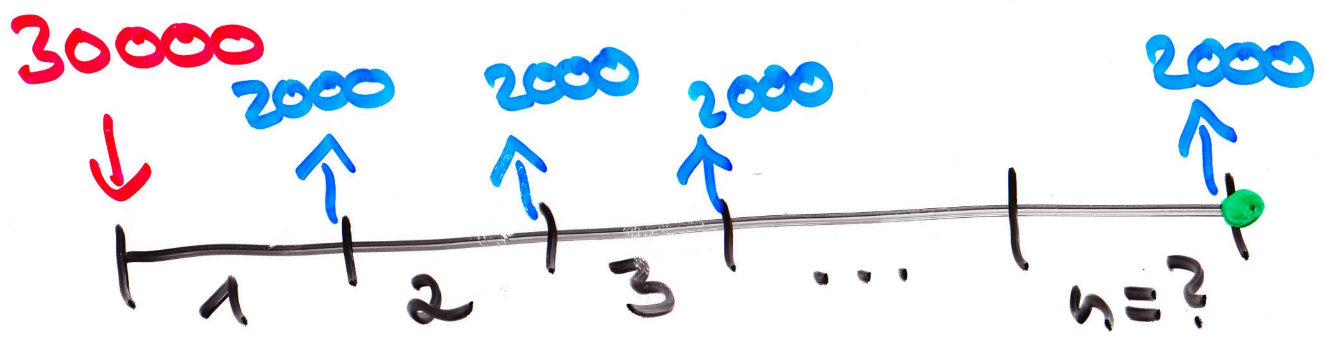
Nr. F.2.1

Laufzeit einer nachsch. Jahresrente, falls R_0 bekannt ist

Beispiel:

Gegen Einzahlung von 30 000 € soll eine nachschüssige Jahresrente von 2000 € ausgezahlt werden.

a) Wie oft kann diese Auszahlung bei 3,8 % Jahreszins geleistet werden?



$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,000}{2000} \cdot 0{,}038\right]}{\ln 1{,}038} = 22{,}63$$

d.h. 22 volle Auszahlungen.

b) Restguthaben unmittelbar nach der letzten vollen Auszahlung?

1. Sparbuch: $30\,000 \cdot 1{,}038^{22} = 68\,149{,}56$

2. Sparbuch: $2000 \cdot \dfrac{1{,}038^{22} - 1}{0{,}038} = 66\,929{,}04$

Differenz $K_{22} = 68\,149{,}56 - 66\,929{,}04$

$= 1\,220{,}52$

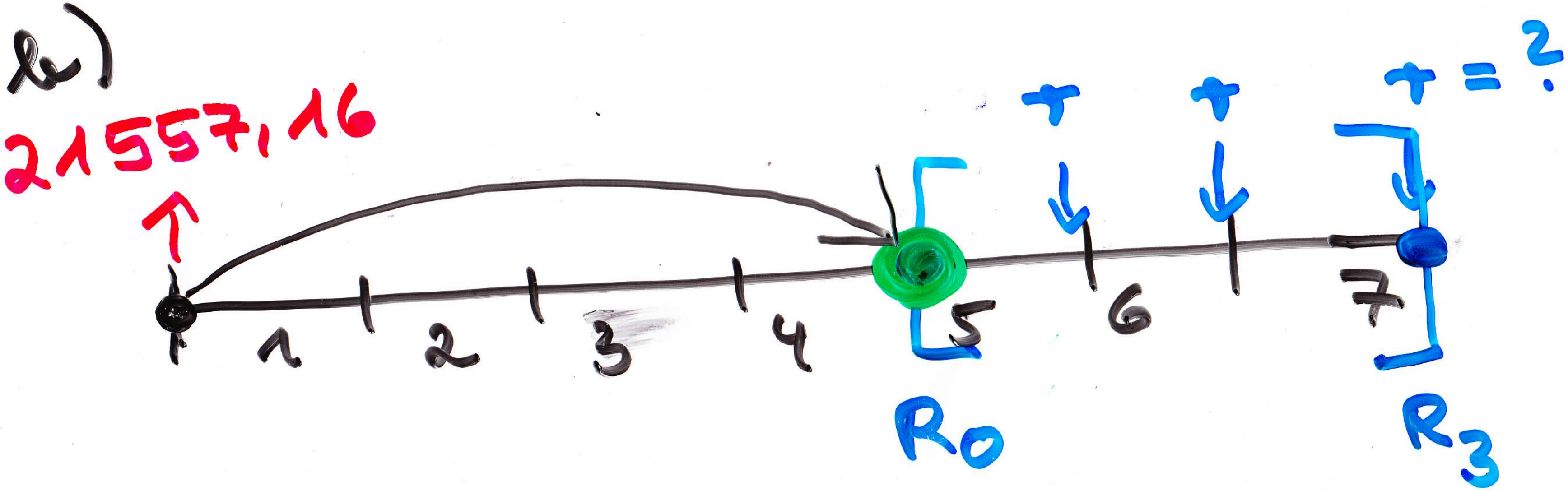
c) Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung?

$$1220{,}52 \cdot 1{,}038 = 1266{,}90$$

Beispiel (Arbeitsblatt)

a) $$R_0 = 4000 \cdot \frac{1{,}07^7 - 1}{0{,}07} \cdot \frac{1}{1{,}07^7} = 21557{,}16$$

b)



Barwert der Rente:

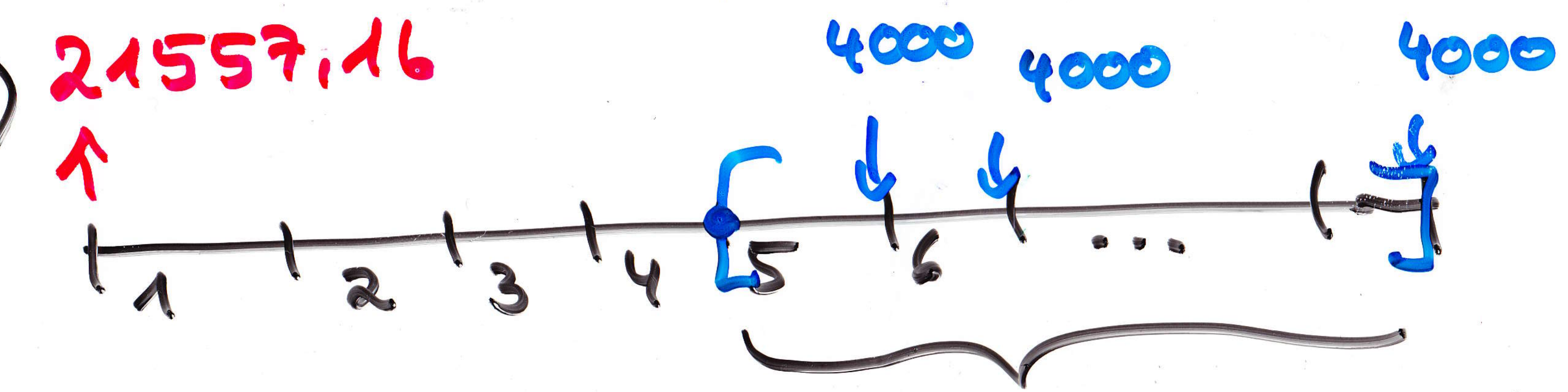
$$21557{,}16 \cdot 1{,}07^4 = 28\,257{,}04$$

$$28\,257{,}04 = r \cdot \frac{1{,}07^3 - 1}{0{,}07} \cdot \frac{1}{1{,}07^3}$$

$$28\,257{,}04 = r \cdot 2{,}6243$$

$$r = 10\,767{,}39$$

c)



$n = ?$

Barwert der Rente:

$$21\,557{,}16 \cdot 1{,}07^4 = \boxed{28\,257{,}04}$$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{28\,257{,}04}{4\,000} \cdot 0{,}07\right]}{\ln 1{,}07}$$

$n = 10{,}08$

d.h. 10 volle Rentenzahlungen