Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik) für die Klausur am 03.07.2018

Aufgabe 1 (15.07.2008)

a) Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p_0 = 5$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:
$$x(p) = 18 - 2p \;\; ; p \in [0; 9]$$

b) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion
$$f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^x \;\; ; x \in \mathbb{R}$$

c) Berechnen Sie:
$$\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 + 16x + 32}{x^2 + 2x - 8}$$

Aufgabe 1 (29.09.2014)

Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2 und K_3 eines Unternehmens erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	10	20	70
von K_2	15	0	35	50
von K_3	30	45	0	25

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 35 GE, bei K_2 in Höhe von 100 GE und bei K_3 in Höhe von 255 GE an.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.

b) Bestimmen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise mit dem Gaußalgorithmus.

Aufgabe 3 (31.01.2013)
Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = x^3 + 2y^2 - x \cdot y + 100 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die Sattelstellen dieser Funktion.

b) Zeigen Sie, dass diese Funktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingung
$$x + y = 9$$
an der Stelle $(x, y) = (3, 6)$ ein lokales Minimum hat.

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)
für die Klausur 09/10 2018

Aufgabe 1 (08.07.2011)

a) Berechnen von der folgenden Preis-Absatz Funktion:
$$x(p) = 60 - 5p; \quad p \in [0; 12]$$
die Umkehrfunktion $p(x)$ sowie den Definitionsbereich von $p(x)$.

b) Die nachfolgende Kostenfunktion gibt die Kosten (in GE) in Abhängigkeit der hergestellten ME x an:
$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 5\,000 \ \ ; x \in \mathbb{R}^+$$
Berechnen und interpretieren Sie Grenzkosten an der Stelle $x = 5$ ME.

c) Bestimmen Sie die Sattelstelle der folgenden Funktion:
$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 2y; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2 (08.02.2012)
Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 her. Der Rohstoffbedarf (in ME) für jeweils eine ME der Endprodukte ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

	E_1	E_2	E_3
R_1	3	2	4
R_2	4	4	1
R_3	2	2	3

Im Lager befindet sich der folgende Vorrat (in ME) der Rohstoffe:

R_1	R_2	R_3
51	43	39

Bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte sich aus diesem Vorrat herstellen lassen, i ndem Sie die folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

b) Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus. Welches Produktionsprogramm lässt sich folglich aus dem Vorrat herstellen?

c) Berechnen Sie weiterhin die Rohstoffkosten pro ME der Endprodukte, wenn im Einkauf derzeit 20 GE für eine ME von R_1, 10 GE für eine ME von R_2 und 20 GE für eine ME von R_3 gezahlt werden müssen.

Aufgabe 3 (03.07.2014)
Ein Unternehmen produziert und vertreibt zwei Güter A und B. Es arbeitet mit der Gewinnfunktion:
$$G(x, y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 \ \ ; x, y, \geq 0$$
Dabei seien x die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von Gut A und y die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von Gut B.

a) Berechnen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm.

b) Das Unternehmen möchte von Gut A und Gut B zusammen a Mengeneinheiten produzieren und absetzen. Dabei sei a eine reelle Zahl größer 3. Berechnen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm in Abhängigkeit von a.

Lösung zu Aufgabe 1 (15.07.2008)

a) $x'(p) = -2$

$\epsilon_x(5) = x'(5) \cdot \dfrac{5}{x(5)} = (-2) \cdot \dfrac{5}{8} = -1{,}25$

d.h. wird der Preis von 5 GE um 1% erhöht, so sinkt der Absatz um 1,25 %.

b) Produktregel

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + (x^3+1) \cdot e^x = e^x(x^3+3x^2+1)$

$f''(x) = e^x(x^3+3x^2+1) + e^x(3x^2+6x) = e^x(x^3+6x^2+6x+1)$

c) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2+16x+32}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2(x+4)(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2(x+4)}{(x-2)} = \dfrac{0}{-6} = 0$

Lösung zu Aufgabe 1: (29.09.2014)

a) Seien v_1, v_2 und v_3 die Bewertungen (in GE) für die Herstellung je einer Leistungseinheit der drei Kostenstellen. Werden für jede Kostenstelle die empfangenen von den abgegebenen Leistungen abgezogen, so müssen die Primärkosten gerade gedeckt sein:

$$\begin{aligned}
(70+10+20)v_1 - 15v_2 - 30v_3 &= 35\\
(50+15+35)v_2 - 10v_1 - 45v_3 &= 100\\
(25+30+45)v_3 - 20v_1 - 35v_2 &= 255
\end{aligned}$$

b) Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich:

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	100	−15	−30	35	
2	$\boxed{-10}$	100	−45	100	
3	−20	−35	100	255	
4	−10	100	−45	100	2
5	0	985	−480	1 035	1 + 10 · 2
6	0	$\boxed{-235}$	190	55	3 − 2 · 2
7	−10	100	−45	100	4
8	0	−235	190	55	6
9	0	0	74 350	297 400	235 · 5 + 985 · 6

Aus Zeile 9 ergibt sich: $74\,350 v_3 = 297\,400 \iff v_3 = 4$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-235v_2 + 190 \cdot 4 = 55 \iff v_2 = 3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $-10v_1 + 100 \cdot 3 - 45 \cdot 4 = 100 \iff v_1 = 2$.

Lösung zu Aufgabe 3: (31.01.2013)

a) $f_x(x,y) = 3x^2 - y \quad f_{xx}(x,y) = 6x$
$f_y(x,y) = 4y - x \quad f_{yy}(x,y) = 4$
$f_{xy}(x,y) = -1$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 0 & = & 3x^2 - y \\ \text{II} & 0 & = & 4y - x \\ \hline 4 \cdot \text{I} + \text{II} & 0 & = & 12x^2 - x = 12x(x - \frac{1}{12}) \end{array} \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{12}$$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow \text{II } 0 = 4y \Leftrightarrow y = 0$
2. Fall: $x = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{II } 0 = 4y - \frac{1}{12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{48}$

d.h. (0;0) und $(\frac{1}{12}; \frac{1}{48})$ sind stationäre Punkte.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y) = 6x \cdot 4 - (-1)^2 = 24x - 1$

$D(0;0) = -1 < 0$ d.h. (0;0) ist eine Sattelstelle

$D(\frac{1}{12}; \frac{1}{48}) = 1 > 0$ und $f_{xx}(\frac{1}{12}; \frac{1}{48}) = \frac{1}{2} > 0$

d.h. $(\frac{1}{12}; \frac{1}{48})$ ist eine lokale Minimalstelle.

b) *Lösungsweg:* Einsetz-Methode

NB $x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - x$

Setze $f(x) = x^3 + 2(9-x)^2 - x(9-x) + 100 = x^3 + 162 - 36x + 2x^2 - 9x + x^2 + 100 = x^3 + 3x^2 - 45x + 262$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$

$f''(x) = 6x + 6$

Notwendige Bedingung:

$f'(3) = 3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 - 45 = 27 + 18 - 45 = 0$

Hinreichende Bedingung:

$f''(3) = 6 \cdot 3 + 6 > 0$

$y = 9 - 3 = 6$

d.h. $f(x,y)$ hat in $(3\,;\,6)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

2. Lösungsweg: Lagrange-Methode:

$L(x,y,\lambda) = x^3 + 2y^2 - xy + 100 + \lambda(x + y - 9)$

$$\begin{array}{lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 3x^2 - y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 6x \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 4y - x + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + y - 9 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -1 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

Da (3;6) gemäß der Aufgabenstellung ein stationärer Punkt ist, muss gelten:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 0 & = & 3 \cdot 9 - 6 + \lambda = 21 + \lambda & \Leftrightarrow \lambda = -21 \\ \text{II} & 0 & = & 4 \cdot 6 - 3 + \lambda = 21 + \lambda & \Leftrightarrow \lambda = -21 \\ \text{III} & 0 & = & 6 + 3 - 9 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$D(3;6;-21) = 6 \cdot 3 \cdot 4 - (-1)^2 = 72 - 1 > 0$

$L_{xx}(3;6;-21) = 6 \cdot 3 = 18 > 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in $(3\,;\,6)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 1 (08.07.2011)

a) $x = 60 - 5p \Leftrightarrow 5p = 60 - x \Leftrightarrow p = 12 - 0{,}2x$
d.h. $p(x) = 12 - 0{,}2x \;\; ; x \in [0; 60]$

b) $K'(x) = 3x^2 - 60x + 300$ und $K'(5) = 75$
d.h. werden statt 5 ME jetzt 6 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 75 GE.

c)
$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = -2x & f_{xx}(x,y) = -2 \\ f_y(x,y) = 2y - 2 & f_{yy}(x,y) = 2 \\ & f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}$$
Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 & = & -2x & \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{II} & 0 & = & 2y - 2 & \Leftrightarrow y = 1 \end{array}$$
d.h. (0;1) ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(0,1) = (-2) \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$
d.h. (0;1) Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2
e_j bezeichne die Menge von Endprodukt E_j für $j = 1, 2, 3$.

a) Zugehöriges Gleichungssystem:
$$\begin{array}{lll} \text{I} & 3e_1 + 2e_2 + 4e_3 & = 51 \\ \text{II} & 4e_1 + 4e_2 + e_3 & = 43 \\ \text{III} & 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 & = 39 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	$\boxed{3}$	2	4	51	
2	4	4	1	43	
3	2	2	3	39	
4	3	2	4	51	
5	0	$\boxed{-4}$	13	75	$4 \cdot 1 - 3 \cdot 2$
6	0	-2	-1	-15	$2 \cdot 1 - 3 \cdot 3$
7	3	2	4	51	
8	0	-4	13	75	
9	0	0	15	105	$5 - 2 \cdot 6$

9 $\quad 15e_3 = 105 \;\Leftrightarrow e_3 = 7$
8 $\quad -4e_2 + 13 \cdot 7 = 75 \Leftrightarrow -4e_2 = -16 \Leftrightarrow e_2 = 4$
7 $\quad 3e_1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = 51 \Leftrightarrow 3e_1 = 15 \Leftrightarrow e_1 = 5$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \}$$

d.h. aus dem Vorrat können 5 ME von E_1, 4 ME von E_2 und 7 ME von E_3 hergestellt werden.

c) Bestimmung der Rohstoffkosten pro Endprodukt:

$$(20; 10; 20) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (140; 120; 150)$$

d.h. eine ME von E_1 kostet an Rohstoffen insgesamt 140 GE, eine ME von E_2 insgesamt 120 GE und eine ME von E_3 insgesamt 150 GE.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $G_x(x,y) = -4x - 4y + 16 \quad G_{xx}(x,y) = -4$

$G_y(x,y) = -4x - 8y + 28 \quad G_{yy}(x,y) = -8$

$G_{xy}(x,y) = -4$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & -4x - 4y + 16 \\ \text{II} & 0 & = & -4x - 8y + 28 \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 & = & 4y - 12 \Leftrightarrow y = 3 \\ \text{I} & 0 & = & -4x - 12 + 16 = -4x + 4 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

d.h. (1;3) stationärer Punkt

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y) = (-4) \cdot (-8) - (-4)^2 = 32 - 16 = 16 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x;y) = -4 <_{\text{immer}} 0$; d.h. (1;3) glob. Maximalstelle

d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x = 1$ ME und $y = 3$ ME.

b) $G(x,y) \stackrel{!}{=}$ max. unter NB:$x + y = a > 3$

1. Lösungsweg: Einsetz-Methode mit $x = a - y$

$G(y) = -2(a-y)^2 - 4(a-y)y - 4y^2 + 16(a-y) + 28y - 400$

$G(y) = -2a^2 + 4ay - 2y^2 - 4ay + 4y^2 - 4y^2 + 16a - 16y + 28y - 400$

$G(y) = -2y^2 + 12y - 2a^2 + 16a - 400$

$G'(y) = -4y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = a - 3$

$G''(y) = -4$ d.h. $G(x,y)$ hat in $(a-3; 3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

2. Lösungsweg: Einsetz-Methode mit $y = a - x$

$G(x) = -2x^2 - 4x(a-x) - 4(a-x)^2 + 16x + 28(a-x) - 400$

$G(x) = -2x^2 - 4ax + 4x^2 - 4a^2 + 8ax - 4x^2 + 16x + 28a - 28x - 400$

$G(x) = -2x^2 + (4a - 12)x - 4a^2 + 28a - 400$

$G'(x) = -4x + 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow x = a - 3 \Rightarrow y = a - (a-3) = 3$

$G''(x) = -4$ d.h. $G(x,y)$ hat in $(a-3; 3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

3. Lösungsweg: Lagrange-Methode

$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 + \lambda(x + y - a)$

$$\begin{array}{lcl} L_x(x, y, \lambda) & = & -4x - 4y + 16 + \lambda \\ L_y(x, y, \lambda) & = & -4x - 8y + 28 + \lambda \\ L_\lambda(x, y, \lambda) & = & x + y - a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} L_{xx}(x, y, \lambda) & = & -4 \\ L_{yy}(x, y, \lambda) & = & -8 \\ L_{xy}(x, y, \lambda) & = & -4 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{I} & 0 & = & -4x - 4y + 16 + \lambda \\ \mathrm{II} & 0 & = & -4x - 8y + 28 + \lambda \\ \mathrm{III} & 0 & = & x + y - a \\ \hline \mathrm{I} - \mathrm{II} & 0 & = & 4y - 12 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = a - 3 \end{array}$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; \lambda_0) = (-4) \cdot (-8) - (-4)^2 = 16 > 0$

$L_{xx}(x; y; \lambda_0) = -4 < 0$

d.h. $G(x, y)$ hat in $(a - 3\,;\, 3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.