

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
 Prof. Dr. Arrenberg
 Raum 221, Tel. 39 14
 jutta.arrenberg@th-koeln.de

Wiederholung QM II
für die Klausur am 04.07.2018

Aufgabe 4: (14.07.2003)

Bei 4% Zinseszins pro Jahr werden auf ein Konto folgende Beträge eingezahlt:

- 2 000 € am 01.01.2003
 - 4 000 € am 01.01.2005
 - 6 000 € am 01.01.2008
- a) Aus dem angesparten Guthaben sollen ab 1.1.2010 jeweils zu Beginn des Jahres regelmäßig 1 000 € abgehoben werden. Wie lange können die vollen Beträge abgehoben werden?
- b) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 01.01.2010 eine monatliche Rente über 90 € fällig jeweils zu Beginn eines Monats bezogen werden. Wie hoch ist das Restguthaben am 31.12.2027?
- c) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 01.01.2010 eine ewige Rente fällig jeweils zu Beginn des Jahres bezogen werden. Wie hoch ist diese ewige Rente?

Aufgabe 1 (27.09.2010)

Ein international tätiges Unternehmen mit mehreren Niederlassungen in Deutschland und dem übrigen Europa hat seine überfälligen Forderungen in Millionen Euro (Mio. EUR) untersucht, nach Fälligkeit in Tagen eingeteilt und einander gegenüber gestellt.

Klasse Nr.	Fälligkeit von über ... bis maximal ... (in Tagen)	Höhe überfälliger Forderungen	
		in Deutschland (in Mio. EUR)	im übrigen Europa (in Mio. EUR)
1	0 bis 30	24	12
2	30 bis 90	48	36
3	90 bis 180	72	66
4	180 bis 360	16	6
Summe		160	120

- a) Wie lange sind 30 Prozent der Forderungen in Deutschland höchstens überfällig?
- b) Wie viel Prozent der Forderungen im übrigen Europa sind länger als 225 Tage überfällig?
- c) Ermitteln Sie unter Zugrundelegung des arithmetischen Mittels, ob die Forderungen in Deutschland oder die Forderungen im übrigen Europa durchschnittlich länger überfällig sind.

- d) In welcher der beiden Regionen schwankt die Fälligkeit der Forderungen stärker? Begründen Sie Ihre Antwort durch Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.
- e) Wie ist die Spannweite definiert? Kann diese bei den vorliegenden klassierten Daten als Parameter verwendet werden? Begründen Sie bitte kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 1 (02.02.2016)

Zwischen dem Absatz X und dem Verkaufspreis Y eines Produkts wird ein linearer Zusammenhang vermutet. Bei den letzten vier Preisveränderungen (in GE) ergaben sich folgende Absätze (in ME):

Absatz	Preis
25	4
21	5
20	7
16	8

- a) Welcher Preis ist anzusetzen, um mit einen Absatz von 18 ME rechnen zu können?
- b) Mit welchem Absatz ist zu rechnen, wenn der Preis auf 9 GE erhöht wird? Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden, die zu dieser Prognose herangezogen wird.
- c) Beurteilen Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs anhand einer geeigneten Maßzahl.
- d) Sind die Berechnungen unter den Teilaufgaben a) und b) aus statistischer Sicht zuverlässig? (Begründung!)

Wiederholung QM II für die Klausur 09/10 2018

Aufgabe 4 (01.07.2015)

Ein Kapital von 50 000 € wird zu einem nominellen Jahreszins von 1,9% angelegt.

- a) Berechnen Sie das Endkapital nach fünf Jahren bei
1. linearer Verzinsung.
 2. nachschüssiger Verzinsung.
 3. quartalsweiser Verzinsung zum relativen Zins.
 4. stetiger Verzinsung.
- b) Am Ende eines welchen Jahres übersteigt das Kapital erstmalig den Wert 52 920 €? Beantworten Sie diese Frage für die vier Zinsmodelle aus a).

Aufgabe 1 (10.07.2007)

- a) Ein Unternehmen produziert und vertreibt Fahrräder vom Typ A, B und C. Insgesamt 35% der abgesetzten Fahrräder sind vom Typ A, 40% vom Typ B und 25% vom Typ C. Dabei werden 30% der Fahrräder vom Typ A außerhalb der EU verkauft. Von Typ B werden 25% und von Typ C 45% der Fahrräder außerhalb der EU abgesetzt. Vor der

Auslieferung werden die Fahrräder einer Qualitätskontrolle unterzogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zufällig für die Qualitätskontrolle ausgewähltes Fahrrad später außerhalb der EU abgesetzt?

- b) Ein Student nimmt im Sommersemester 2007 an zwei Klausuren in den Fächern Statistik und Recht teil. Er schätzt seine Chance, die Statistik-Klausur zu bestehen, mit 75% ein. In Recht schätzt er die Wahrscheinlichkeit, die Klausur zu bestehen, auf 80%. Der Student geht ferner davon aus, dass sein Klausurergebnis in Recht stochastisch unabhängig ist von seinem Klausurergebnis in Statistik. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht der Student mindestens eine der beiden Klausuren?
- c) Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable X mit den folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten:

Wert x	$P(X = x)$
1	0,20
2	0,30
3	0,23
4	0,15
5	0,12

Berechnen Sie den Erwartungswert von X .

Aufgabe 1 (02.02.2016)

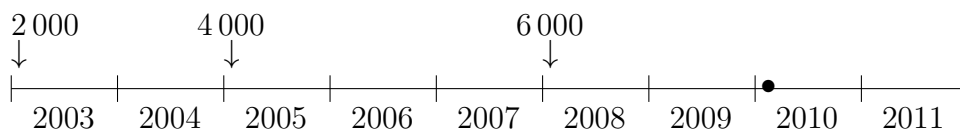
Zwischen dem Absatz X und dem Verkaufspreis Y eines Produkts wird ein linearer Zusammenhang vermutet. Bei den letzten vier Preisveränderungen (in GE) ergaben sich folgende Absätze (in ME):

Absatz	Preis
25	4
21	5
20	7
16	8

- a) Welcher Preis ist anzusetzen, um mit einen Absatz von 18 ME rechnen zu können?
- b) Mit welchem Absatz ist zu rechnen, wenn der Preis auf 9 GE erhöht wird? Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden, die zu dieser Prognose herangezogen wird.
- c) Beurteilen Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs anhand einer geeigneten Maßzahl.
- d) Sind die Berechnungen unter den Teilaufgaben a) und b) aus statistischer Sicht zuverlässig? (Begründung!)

Lösung zu Aufgabe 4: (14.07.2003)

Guthaben am 01.01.2010



$$2000 \cdot 1,04^7 + 4000 \cdot 1,04^5 + 6000 \cdot 1,04^2 = 13\,988,08$$

a) $r \cdot q = 1\,000 \cdot 1,04 = 1\,040$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{13\,988,08}{1\,040} \cdot 0,04\right]}{\ln 1,04} = 19,7$$

d.h. volle Beträge 19 Jahre lang.

b) $r_j = 90(12 + 6,5 \cdot 0,04) = 1\,103,40$

$$13\,988,08 \cdot 1,04^{18} - 1\,103,40 \cdot \frac{1,04^{18} - 1}{0,04} = 40,15$$

d.h. am 31.12.2027 beträgt das Restguthaben 40,15 €

c) $R_0 = 13\,988,08$

$$13\,988,08 \cdot 0,04 = 559,59 \text{ ewige nachschüssige Rente}$$

$$\frac{559,59}{1,04} = 538$$

d.h. die ewige vorschüssige Rente beträgt 538 €

Lösung zu Aufgabe 1: (27.09.2010)

X = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung in Höhe von 1 Mio. EUR in Deutschland

Y = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung in Höhe von 1 Mio. EUR im übrigen Europa

n_j^x = Anzahl der Forderungen über eine Mio. EUR in der j -en Klasse in Deutschland

n_j^y = Anzahl der Forderungen über eine Mio. EUR in der j -en Klasse im übrigen Europa

j	$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	x_j'	b_j	n_j^x/n	$F(x_j^*)$	n_j^y/n	$F(y_j^*)$
1	0 – 30	15	30	0,15	0,15	0,10	0,10
2	30 – 90	60	60	0,30	0,45	0,30	0,40
3	90 – 180	135	90	0,45	0,90	0,55	0,95
4	180 – 360	270	180	0,10	1,00	0,05	1,00
Σ				1,00		1,00	

a) $x_{0,30} \approx 30 + \frac{0,30 - 0,15}{0,30} \cdot 60 = 60$

d.h. etwa 30% aller Forderungen in Deutschland sind höchstens 60 Tage überfällig.

b) $F(225) \approx 0,95 + \frac{0,05}{180}(225 - 180) = 0,9625$

$$100\% - 96,25\% = 3,75\%$$

d.h. etwa 4% aller Forderungen im übrigen Europa sind länger als 225 Tage überfällig.

c) $\bar{y} \approx \frac{1}{120} [15 \cdot 12 + 60 \cdot 36 + 135 \cdot 66 + 270 \cdot 6] = 107,25$

d.h. im übrigen Europa ist eine Forderung in Höhe von einer Mio. EUR im Durchschnitt etwa 107 Tage überfällig.

$$\bar{x} \approx \frac{1}{160} [15 \cdot 24 + 60 \cdot 48 + 135 \cdot 72 + 270 \cdot 16] = 108$$

d.h. in Deutschland ist eine Forderung in Höhe von einer Mio. EUR im Durchschnitt 108 Tage überfällig und damit etwas länger überfällig als im übrigen Europa.

$$\begin{aligned}
d) \quad s_x^2 &\approx \frac{1}{160} \left[(15 - 108)^2 \cdot 24 + (60 - 108)^2 \cdot 48 + (135 - 108)^2 \cdot 72 \right. \\
&\quad \left. + (270 - 108)^2 \cdot 16 \right] \\
&= 4941 \\
s_y^2 &\approx \frac{1}{120} \left[(15 - 107,25)^2 \cdot 12 + (60 - 107,25)^2 \cdot 36 + (135 - 107,25)^2 \cdot 66 \right. \\
&\quad \left. + (270 - 107,25)^2 \cdot 6 \right] \\
&= 3268,688
\end{aligned}$$

d.h. gemessen mit der Varianz sind die Unterschiede der Fälligkeitsdauern der Forderungen in Deutschland stärker.

- e) Die Spannweite ist die Differenz aus dem größten beobachteten Wert und dem kleinsten beobachteten Wert. Da bei klassierten Daten (wie hier im Beispiel) nicht mehr die Einzelwerte vorliegen, sondern nur noch die Klassen, in die die Einzelwerte fallen, können hier weder ein größter noch ein kleinster beobachteter Wert bestimmt werden und somit kann die Spannweite nicht berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 1 (02.02.2016)

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	25	4			
2	21	5			
3	20	7			
4	16	8			
Σ	82	24	473	1722	154

- a) Gesucht $a_1 + b_1 \cdot 18 = ?$

$$b_1 = \frac{4 \cdot 473 - 82 \cdot 24}{4 \cdot 1722 - 82^2} = \frac{-76}{164} = -0,4634146 \approx -0,46$$

$$a_1 = \frac{24 - (-0,46) \cdot 82}{4} = 15,43$$

$$15,43 - 0,46 \cdot 18 = 7,15$$

d.h. es ist ein Preis von etwa 7 GE anzusetzen.

- b) Gesucht $a_2 + b_2 \cdot 9 = ?$

$$b_2 = \frac{-76}{4 \cdot 154 - 24^2} = \frac{-76}{40} = -1,9$$

d.h. steigt der Preis um eine GE, so sinkt der Absatz um etwa 1,9 ME.

$$a_2 = \frac{82 - (-1,9) \cdot 24}{4} = 31,9$$

$$31,9 - 1,9 \cdot 9 = 14,8 \approx 15$$

d.h. es ist mit einem Absatz von etwa 15 ME zu rechnen.

- c) $r = -\sqrt{(-0,46) \cdot (-1,9)} = -\sqrt{0,874} = -0,9348797 \approx -0,93$

d.h. es liegt eine starke (negative) Korrelation vor.

- d) Auf den Prognosewert aus Teilaufgabe a) ist Verlass, da es sich um einen interpolierten Wert ($18 \in [16; 25]$) bei gleichzeitig starker Korrelation handelt. Auf den Prognosewert aus Teilaufgabe b) ist kein Verlass, da es sich um einen extrapolierten Wert ($9 \notin [4; 8]$) handelt.

b) S =Student besteht Statistik-Klausur

R =Student besteht Recht-Klausur

Da R und S stochastisch unabhängig sind, gilt: $P(S \cap R) = P(S) \cdot P(R) = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$

Arbeitstabelle:

	R	\bar{R}	Σ
S	0,6	0,15	0,75
\bar{S}	0,2	0,05	0,25
Σ	0,8	0,2	1

$$P(S \cup R) = 1 - 0,05 = 0,95$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 95%.

c) $E[X] = 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,23 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,12 = 2,69$

d.h. der Erwartungswert beträgt 2,69.