Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Wiederholung für die QM III-Klausur am 03.07.2018 und 09/10 2018

Aufgabe 3 (11.02.2005)
Ein Versicherungsvertreter weiß aufgrund seiner langjährigen Erfahrung, dass 41% der neu abgeschlossenen Versicherungsverträge noch während der Rücktrittsfrist von den Kunden gekündigt werden.

1. An einem Tag hat der Versicherungsvertreter fünf Versicherungsverträge abgeschlossen.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Versicherungsverträge des Tages erfüllt, d.h. nicht gekündigt werden?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Versicherungsverträge erfüllt werden?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei der Versicherungsverträge erfüllt werden?
2. In einem Monat hat der Versicherungsvertreter 85 Versicherungsverträge abgeschlossen. Er erhält eine Sonderprämie, wenn er im Monat 50 Versicherungsverträge abschließt, die nicht während der Rücktrittsfrist gekündigt werden.
   a) Kann der Versicherungsvertreter damit rechnen, in diesem Monat die Sonderprämie zu bekommen?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsvertreter in diesem Monat die Sonderprämie erhält?

Aufgabe 1 (20.07.2017)

a) Es ist bekannt, dass die Tagesrendite einer Aktie (Angabe in %) normalverteilt ist mit Erwartungswert 0,1% und Standardabweichung 0,7%.
   1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Tagesrendite dieser Aktie höher als 1,5% ist!
   2. Welcher konkrete Wert der Tagesrendite wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht unterschritten?
   3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tagesrendite an drei Tagen genau zweimal höher als 1,5% ist, wenn die Tagesrenditen stochastisch unabhängig voneinander sind?

c) Die Tagesrendite einer weiteren Aktie sei ebenfalls normalverteilt und es sei ferner das zweifache Schwankungsintervall bekannt. Die untere Grenze dieses Intervalls ist gegeben durch $-1{,}9886$ und die obere Grenze durch $2{,}3886$.
Bestimmen Sie aus diesen Angaben den Erwartungswert und die Varianz der Tagesrendite dieser zweiten Aktie!

Aufgabe 2 (25.01.2017)
Das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners eines Landes sei normalverteilt mit der Standardabweichung 8 000 Euro. Die Präsidentin dieses Landes behauptet im Wahlkampf: „Unsere politischen Maßnahmen haben dazu geführt, dass das Jahresdurchschnittseinkommen in unserem Land mittlerweile 35 000 Euro beträgt.“

a)
1. Formulieren Sie die Aussage der Präsidentin als Nullhypothese und stellen Sie die zugehörige Gegenhypothese auf.
2. Welcher statistische Test ist grundsätzlich geeignet, um die Aussage zu belegen oder widerlegen?
3. Was sind die Voraussetzungen, um diesen Test anwenden zu können?

b) Unter 500 Einwohnern des Landes wird daraufhin von der Opposition eine Umfrage durchgeführt, die ein Jahresdurchschnittseinkommen von nur 34 000 Euro ausweist.

1. Kann der Präsidentin auf Grundlage des von Ihnen unter Teilaufgabe a) genannten statistischen Tests zum Signifikanzniveau 0,05 vorgeworfen werden, die Fakten zu verdrehen?
2. Beschreiben Sie in Worten, für welche Signifikanzniveaus die Entscheidung des statistischen Tests dieselbe bleibt wie in Teilaufgabe b.1).
3. Begründen Sie hiervon ausgehend, wie Sie die Aussagekraft Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe b.1) einordnen.
4. Verwenden Sie, falls möglich, einen weiteren statistischen Test zum Signifikanzniveau 0,05, um nachzuweisen, in welche Richtung eine Abweichung von der Aussage der Präsidentin zu beobachten ist. Falls die Anwendung eines solchen statistischen Tests hier nicht sinnvoll ist, begründen Sie, weshalb das so ist.

Lösung zu Aufgabe 3 (11.02.2005)
1. Lösungsweg
$X =$ Anzahl der Versicherungsverträge, die erfüllt werden
$X \sim \mathsf{B}(n; p = 0{,}59)$

1. $X \sim \mathsf{B}(n = 5; p = 0{,}59)$

   a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}59^5 \cdot 0{,}41^0 = 0{,}0715$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0715.

   b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0{,}0116 - 0{,}0834 = 0{,}9050$
   $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}59^0 \cdot 0{,}41^5 = 0{,}0116$

$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}59^1\cdot 0{,}41^4=0{,}0834$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,9050.

c) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}0116+0{,}0834+0{,}2399=0{,}3349$
$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}59^2\cdot 0{,}41^3=0{,}2399$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,3349.

2. $X\sim \mathsf{B}(n=85;p=0{,}59)$

a) $E[X]=85\cdot 0{,}59=50{,}15$
d.h. er kann erwarten, die Prämie zu bekommen.

b) ZGWS
Faustregel $np=50{,}15\ge 10$ und $n(1-p)=34{,}85\ge 10$ ist erfüllt
$P(X\ge 50)=1-P(X<50)=1-P(X\le 49)\approx 1-F_U\left(\frac{49+0{,}5-50{,}15}{\sqrt{50{,}15\cdot 0{,}41}}\right)=1-F_U(-0{,}1434)=1-0{,}443=0{,}557.$
d.h. die Wahrscheinlichkeit ist etwas höher als 50%.

Lösung zu Aufgabe 1: (20.07.2017)

a) X=Tagesrendite (in %)
$X\sim \mathsf{N}(\mu=0{,}1;\sigma=0{,}7)$

1. $P(X>1{,}5)=1-P(X\le 1{,}5)=F_U\left(\frac{1{,}5-0{,}1}{0{,}7}\right)=1-F_U(2)=1-0{,}977=0{,}023=2{,}3\%$
2. $0{,}01=P(X\le x)\Leftrightarrow -2{,}3263=\frac{x-0{,}1}{0{,}7}\Leftrightarrow x=0{,}1-2{,}3263\cdot 0{,}7=-1{,}52841$
d.h. die gesuchte Tagesrendite beträgt $-1{,}52841\%$.
3. Z = Anzahl der Tage, an denen die Rendite über 1,5% liegt
$Z\sim \mathsf{B}(n=3;p=0{,}023)$
$P(Z=2)=\binom{3}{2}\cdot 0{,}023^2\cdot 0{,}977=0{,}0016$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0016.

b) Y=Tagesrendite (in %)
$Y\sim \mathsf{N}(\mu;\sigma)$
$[\mu-2\cdot\sigma;\mu+2\cdot\sigma]=[-1{,}9886;+2{,}3886]$
1. Lösungsweg:

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & -1{,}9886 & = & \mu-2\cdot\sigma\\
\mathrm{II} & 2{,}3886 & = & \mu+2\cdot\sigma\\
\hline
\mathrm{II}-\mathrm{I} & 4{,}3772 & = & 4\cdot\sigma\Leftrightarrow\sigma=1{,}0943\Leftrightarrow\sigma^2=1{,}0943^2=1{,}1975\\
\mathrm{I} & -1{,}9886 & = & \mu-2\cdot 1{,}0943\Leftrightarrow\mu=2\cdot 1{,}0943-1{,}9886=0{,}2
\end{array}$$

2. Lösungsweg:
μ=Intervallmitte = (Untergrenze + Obergrenze) $\div$ 2 = $(-1{,}9886+2{,}3886)\div 2=0{,}2$

Intervallänge = Obergrenze minus Untergrenze = $4 \cdot \sigma$ = $2{,}3886 - (-1{,}9886) = 4{,}3772 \Leftrightarrow \sigma = \frac{4{,}3772}{4} = 1{,}0943 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1{,}0943^2 = 1{,}1975$

Lösung zu Aufgabe 2: (25.01.2017)

Die Zufallsvariable X beschreibe das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners des Staates. Nach Angabe gilt, dass $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 8\,000)$.

a)
1. Die Aussage der Präsidentin mündet in das Testproblem:
   $$H_0 : E[X] = 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] \neq 35\,000.$$
2. Es sollte der (zweiseitige) Gaußtest durchgeführt werden.
3. Weil es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable mit bekannter (theoretischer) Varianz handelt, sind die Voraussetzungen für den Gaußtest erfüllt.

b)
1. Wir berechnen den p-Wert:
   $$2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{34\,000 - 35\,000}{8\,000/\sqrt{500}}\right|\right) \approx 2 \cdot F_U(-2{,}7951) \approx 2 \cdot 0{,}003 = 0{,}006.$$
   Weil der p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ ist, wird die Nullhypothese abgelehnt. Das heißt, dass der Präsidentin zum Signifikanzniveau 0,05 zurecht vorgeworfen werden kann, die Tatsachen zu verdrehen.
2. Die Nullhypothese wird anhand dieser Stichprobe für alle Signifikanzniveaus $\alpha \geq 0{,}006$ abgelehnt.
3. *1. Lösungsweg:*
   Je kleiner der p-Wert ist, desto unplausibler ist H_0.
   2. Lösungsweg:
   Für einen p-Wert $\leq 0{,}01$ wird von einem hoch-signifikanten Ergebnis des Tests gesprochen, so dass wir mit großer Sicherheit auf das Ergebnis auf Teilaufgabe b.1) vertrauen können.
4. Wegen der Ablehnung der Nullhypothese ist es sinnvoll, auch den einseitigen Gaußtest durchzuführen. Die Gegenhypothese muss dabei die Situation der Stichprobe widerspiegeln, also:
   $$H_0 : E[X] \geq 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] < 35\,000.$$
   Gemäß Aufgabenteil b.1) ergibt sich für den p-Wert:
   $$p\text{-Wert} = \frac{0{,}006}{2} = 0{,}003.$$
   Wegen $0{,}003 < 0{,}05$ wird die Nullhypothese des einseitigen Gaußtests abgelehnt, das heißt das Jahresdurchschnittseinkommen eines Einwohners ist im Mittel signifikant niedriger als von der Präsidentin behauptet.