4.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

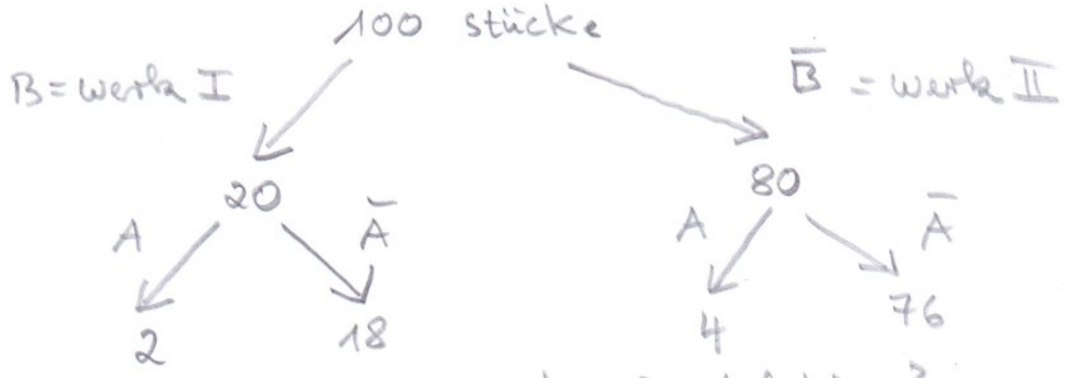
Produktion von 100 Stücken, die entweder in Werk I oder in Werk II hergestellt werden. Wir betrachten dazu folgende Ereignisse:

A = ein zufällig ausgewähltes Stück ist Ausschuss

B = ein zufällig ausgewähltes Stück wird in Werk I hergestellt

Dann gilt: $\overline{B}$ = ein zufällig ausgewähltes Stück wird in Werk II hergestellt

Folgende Anzahlen sind bekannt:



a) Ausschussquote der gesamten Produktion?

$$P(A) = \frac{2+4}{100} = 0{,}06 = 6\,\%$$

b) Ausschussquote in Werk I?

$$\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\,\%$$

c) Ausschussquote in Werk II?

$$\frac{4}{80} = 0{,}05 = 5\,\%$$

d) Anteil der Produktion in Werk I?

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2 = 20\,\%$$

e) Anteil von Stücken in der Produktion, die sowohl in Werk I hergestellt werden als auch Ausschuss sind?

$$P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0{,}02 = 2\,\%$$

f) Die Wkt. von 10 % aus Teilaufgabe b) ergibt sich auch, wenn $P(A \cap B)$ ins Verhältnis zu $P(B)$ gesetzt wird:

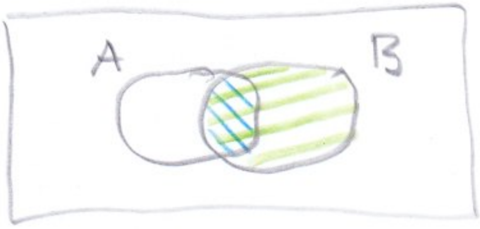
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1 = 10\,\%$$

Dieser Quotient wird als **bedingte Wkt.** von A unter der Bedingung B bezeichnet:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

S. 222 (a)

$P(A|B)$ gibt den Anteil von $P(A \cap B)$ in $P(B)$ an:



also den Anteil der blau schraffierten Fläche an der grün schraffierten Fläche

Abschließen füllen wir noch die Arbeitstabelle für dieses Beispiel aus:

	A	$\bar{A}$	Σ
B	0,02	0,18	0,20
$\bar{B}$	0,04	0,76	0,80
Σ	0,06	0,94	1

⚠ Das Problem von bedingten Wkt. ist nicht das Rechnen, sondern das Erkennen, ob eine bedingte Wkt. vorliegt.

Beispiel:
Umfrage zu Dauer von Telefongesprächen:
- 60% der Langtelefonierer sind Frauen
- 40% aller Befragten sind Langtelefonierer
- 50% aller Befragten sind Männer, die nicht lange telefonieren

Wieviel Prozent der Befragten,
a) die lange telefonieren, sind Männer?
b) die weiblich sind, telefonieren lange?
c) die nicht lang telefonieren, sind Männer?

Zunächst kürzen wir die Ereignisse mit einem Großbuchstaben ab:

L = Langtelefonierer
F = Frau
M = Mann

Arbeitstabelle:

	F	M	
L			0,40
$\bar{L}$		0,50	0,60
			1

Danach suchen wir die Wkt.
$0,60 = P(F|L)$
$0,40 = P(L)$
$0,50 = P(M \cap \bar{L})$

Die bedingte Wkt. $P(F|L) = 0,60$ kann nicht in die Arbeitstabelle eingetragen werden. Es gilt aber gemäß S. 2.2.2 a):

$$P(F|L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} \Leftrightarrow P(F \cap L) = P(F|L) \cdot P(L) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

S. 2.2.2 (b)

Arbeitstabelle:

	F	M	Σ
L	0,24		0,40
$\bar{L}$		0,50	0,60
Σ			1

	F	M	Σ
L	0,24	0,16	0,40
$\bar{L}$	0,10	0,50	0,60
Σ	0,34	0,66	1

zu a) $P(M|L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{0,16}{0,40} = 0,40$

zu b) $P(L|F) = \frac{P(L \cap F)}{P(F)} = \frac{0,24}{0,34} \approx 0,71$

zu c) $P(M|\bar{L}) = \frac{P(M \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,50}{0,60} \approx 0,83$

Bitte üben Sie das Erkennen von bedingten Wkt. anhand des Beispiels 4.40 und der Aufgabe 4.3 aus dem Lehrbuch „Wirtschaftsstatistik für Bachelor" und anhand des Übungsbuchs „Wirtschaftsstatistik: 77 Aufgaben, die Bachelorstudierende beherrschen müssen".

4.5 Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Sind für zwei Ereignisse A und B die beiden Wkt. $P(A|B)$ und $P(A)$ gleich groß, so werden A und B als stochastisch unabhängige Ereignisse bezeichnet. S. 2.2.2 (c)

Beispiel:

Die Studierenden der TH Köln kommen wie folgt zur TH:

- 10% mit dem Auto / Motorrad / Roller
- 15% zu Fuß
- 20% mit einem Fahrrad
- der Rest mit öffentlichen Verkehrsmitteln.

Von den Nutzern eines Autos / Motorrads / Rollers sind 2% verspätet, zu Fuß sind 1% verspätet, mit dem Rad 3% und mit öffentlichen Verkehrsmitteln 5%.

a) Wie hoch ist der Anteil der Studierenden, die verspätet ankommen?

b) Ein Studierender ist verspätet. Wie hoch ist die Wkt, dass er mit Auto / Motorrad / Roller angereist ist?

c) Sind die Ereignisse „ein zufällig ausgewählter Stud. kommt mit öffentlichen Verkehrsmitteln" und „ein zufällig ausgewählter Stud. ist verspätet" stochastisch unabhängig?

A = Auto / Motorrad / Roller

F = zu Fuß

R = Rad

$Ö$ = öffentliches Verkehrsmittel

V = verspätet

Angegeben sind die Wkt.:

Mit Formel S. 2.2.2(b) ergibt sich:

1

$0{,}10 = P(A)$ $\quad 0{,}02 = P(V|A) \Rightarrow P(A \cap V) = P(V|A) \cdot P(A) = 0{,}02 \cdot 0{,}1 = 0{,}002$

$0{,}15 = P(F)$ $\quad 0{,}01 = P(V|F) \Rightarrow P(F \cap V) = P(V|F) \cdot P(F) = 0{,}01 \cdot 0{,}15 = 0{,}0015$

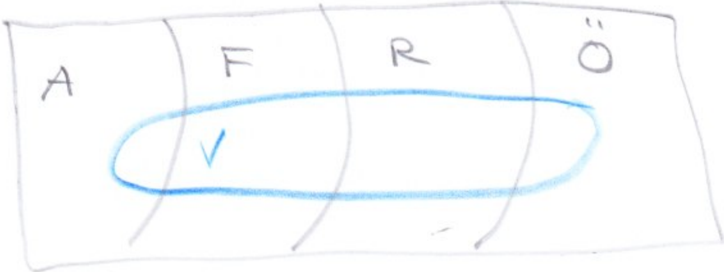
$0{,}20 = P(R)$ $\quad 0{,}03 = P(V|R) \Rightarrow P(R \cap V) = P(V|R) \cdot P(R) = 0{,}03 \cdot 0{,}2 = 0{,}006$

$0{,}55 = P(Ö)$ $\quad 0{,}05 = P(V|Ö) \Rightarrow P(Ö \cap V) = P(V|Ö) \cdot P(Ö) = 0{,}05 \cdot 0{,}55 = 0{,}0275$

Die Ereignisse $A, F, R, Ö$ bilden eine sogenannte Zerlegung:

Mit genau einer dieser vier Möglichkeiten muss ein Stud. anreisen

Das Ereignis V = „verspätet" hat eine Schnittmenge mit jedem der vier Ereignisse der Zerlegung:



Wir könnten jetzt alle Wkt. ins Venndiagramm eintragen. Stattdessen nutzen wir die Arbeitstabelle:

	A	F	R	Ö	Σ
V	0,0020	0,0015	0,0060	0,0275	0,0370
$\overline{V}$					
Σ	0,10	0,15	0,20	0,55	1

zu a) $P(V) = 0{,}037$

zu b) $P(A|V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}0020}{0{,}037} = 0{,}\overline{054}$

zu c) $P(V|Ö) = 0{,}05 \neq 0{,}037 = P(V)$

d.h. $V, Ö$ sind nicht stochastisch unabhängig.

Beispiel:
was schätzen Sie, wie hoch die Markt durchdringung von Mobiltelefonen in Deutschland ist?

M = Mobiltelefon und $P(M) = 0{,}82$

J = jung = 20-29 Jahre

Sind die Ereignisse J und M stochastisch unabhängig?

$P(M|J) = 0{,}989$ d.h. 98,9% der 20-29 Jährigen besitzen mindestens ein Mobiltelefon.

$P(M|J) = 0{,}989 \neq 0{,}82 = P(M)$; d.h. M, J abhängig

wir möchten noch die Arbeitstabelle ~~kennen~~ lernen für den Spezialfall, dass zwei Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

Beispiel:
Im einem Land trinken 40% aller Einwohner Kaffee zum Frühstück und 30% aller Einwohner nutzen ein Fahrrad. Nehmen Sie an, dass die Ereignisse „Kaffeetrinken" und „Radfahren" stochastisch unabhängig sind. Wie viel Prozent aller Einwohner trinken dann weder Kaffee zum Frühstück, noch nutzen sie ein Rad?

K = Kaffeetrinken $0{,}40 = P(K)$
R = Rad fahren $0{,}30 = (R)$

Und es gilt: $P(K|R) = P(K)$.

Daraus ergibt sich mit $P(K|R) = \frac{P(K \cap R)}{P(R)}$:

$P(K \cap R) = P(K) \cdot P(R)$ S. 2. 2. 2 (c)

$P(K \cap R) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$ wir stellen die Arbeitstabelle auf!

	K	$\overline{K}$	Σ
R	0,12	0,18	0,30
$\overline{R}$	0,28	0,42	0,70
Σ	0,40	0,60	1

Es gilt:
$0{,}18 = 0{,}30 \cdot 0{,}60$
$0{,}42 = 0{,}70 \cdot 0{,}60$
$0{,}28 = 0{,}70 \cdot 0{,}40$

$P(\overline{K} \cap \overline{R}) = 0{,}42 = 42\%$

Fazit: Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, so lässt sich jede der vier Wahrscheinlichkeiten im Inneren der Arbeitstabelle als Produkt der jeweiligen Zeilenrandsumme-Wert. und Spaltenrandsumme-Wert. berechnen.