Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 3914
Email: jutta.arrenberg@th-koeln.de
Homepage: *http://fh-koeln.arrenberg.com/*

Brückenkurs über Logarithmen

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ heißt **Logarithmus** der Zahl b zur **Basis** a. Wir schreiben kurz:

$$x = \log_a b$$

Der Logarithmus von b zur Basis a gibt also an, mit welchem Exponenten die Basis a versehen werden muss, um die Zahl b zu erhalten.

Beispiel: $\log_2 8 = 3$; denn $2^3 = 8$

Der Logarithmus ist sinnvoll erklärt für folgende Basen a und für folgende Zahlen (Numeri) b:

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
$$b \in \mathbb{R}^+$$

Der Logarithmus zur Basis $e = 2{,}7183\ldots$ erhält eine eigene Bezeichnung. Er heißt **natürlicher Logarithmus** und wird mit ln abgekürzt:

$$\ln(148{,}4132) = \log_e(148{,}4132) = 5 \quad ; \text{denn } e^5 = 148{,}4132.$$

Ebenfalls eine eigene Bezeichnungsweise erhält der Logarithmus zur Basis 10. Er heißt **Zehner-Logarithmus** und wird mit lg abgekürzt:

$$\lg(10\,000) = \log_{10}(10\,000) = 4 \quad ; \text{denn } 10^4 = 10\,000.$$

Taschenrechner lassen nur die Berechnung bestimmter Logarithmen zu, normalerweise des natürlichen Logarithmus ln und des Zehner-Logarithmus lg. Werte von Logarithmen zu anderen Basen als e und 10 können wir mit Hilfe der folgenden Formel berechnen:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Beispiel: $\log_2 1024 = \dfrac{\log_e 1024}{\log_e 2} = \dfrac{\ln 1024}{\ln 2} = \dfrac{6,9315}{0,6931} = 10$

Für das Rechnen mit Logarithmen benötigen wir die folgenden **Rechenregeln**:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \log_a(u \cdot v) & = & \log_a(u) + \log_a(v) \\ \log_a(\frac{u}{v}) & = & \log_a(u) - \log_a(v) \\ \log_a(u^r) & = & r \cdot \log_a(u) \end{array}}$$

für $u, v \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $r \in \mathbb{R}$.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Email: jutta.arrenberg@fh-koeln.de
Homepage: *http://th-koeln.arrenberg.com/*

Brückenkurs
Übungsaufgaben zum Logarithmus

Aufgabe L.1
Berechnen Sie auf vier Nachkommastellen genau:

a) $\log_{17} 83\,521$

b) $\log_{17} 70\,000$

c) $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08}$

d) $\ln \dfrac{2}{1{,}08}$

e) $\ln 2 - \ln 1{,}08$

f) $\ln 53$

g) $\ln e$

h) $\ln \left(e^{20}\right)$

i) $(\ln e)^{20}$

j) $\ln \left(e^{0}\right)$

k) $e^{\ln(17)}$

l) $e^{\ln(58)}$

Aufgabe L.2
Der Wert eines Kapitals K steigt jährlich um 6%. Nach wie vielen Jahren hat sich der Wert verdreifacht?

Aufgabe L.3
Die Weltbevölkerung zählte Ende 2016 etwa 7,2 Milliarden Menschen. Zur Zeit wächst die Weltbevölkerung jedes Jahr um etwa 1,1%. Bei welchem Jahreswechsel wird die Weltbevölkerung etwa neun Milliarden Menschen betragen?

Lösung von Aufgabe L.1

a) $\log_{17} 83\,521 = 4$

b) $\log_{17} 70\,000 = \frac{\ln 70\,000}{\ln 17} = 3{,}9377$

c) $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08} = 9{,}0065$

d) $\ln \dfrac{2}{1{,}08} = 0{,}6162$

e) $\ln 2 - \ln 1{,}08 = 0{,}6162$

f) $\ln 53 = 3{,}9703$

g) $\ln e = 1$

h) $\ln \left(e^{20}\right) = 20 \cdot \ln e = 20$

i) $(\ln e)^{20} = 1^{20} = 1$

j) $\ln \left(e^{0}\right) = \ln 1 = 0$

k) $e^{\ln 17} = 17$

l) $e^{\ln 58} = 58$

Lösung von Aufgabe L.2

$K \cdot 1,06^n = 3 \cdot K \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}06} = 18,8542$ d. h. nach 19 Jahren hat sich das Kapital verdreifacht.

Lösung von Aufgabe L.3

Nach einem Jahr, also Ende 2017, wird die Weltbevölkerung gewachsen sein auf:

$$7{,}2 + 7{,}2 \cdot 0{,}011 = 7{,}2 \cdot 1{,}011 = 7{,}2792 \approx 7{,}3 \text{ Mrd. Menschen}$$

Nach einem weiteren Jahr, also Ende 2018, wird die Weltbevölkerung gewachsen sein auf:

$$7{,}2 \cdot 1{,}011^2 = 7{,}359271 \approx 7{,}4 \text{ Mrd. Menschen}$$

Wir suchen die Anzahl x der Jahre, für die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
7{,}2 \cdot 1{,}011^x &= 9 && \mid \div 7{,}2 \\
1{,}011^x &= 1{,}25 && \mid \text{Definition Logarithmus} \\
x &= \log_{1{,}011} 1{,}25 && \mid \text{Umrechnungs-Formel} \\
x &= \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}011} = 20{,}4
\end{aligned}$$

d.h. nach etwa 21 Jahren, also beim Jahreswechsel 2037/2038, wird die Weltbevölkerung erstmals über neun Milliarden Menschen zählen.