Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM II

Nachschüssige Verzinsung

Aufgabe 2.1
Auf welches Guthaben ist ein Kapital von Euro 20 000 nach fünf Jahren bei jährlichen nachschüssigen Zinseszinsen von 1,2% angewachsen? (*Lösung:* $K_5 = 21\,229{,}15$)

Aufgabe 2.2
Ein Kapital ist nach zwölf Jahren bei jährlichen nachschüssigen Zinseszinsen von 1,3 % auf Euro 58 382,59 angewachsen. Wie groß war das Startkapital? (*Lösung:* $K_0 = 50\,000$)

Aufgabe 2.3
Ein Kapital von Euro 10 000 wird sieben Jahre lang auf Zinseszins angelegt. Für das erste Jahr werden 4 %, für das zweite, dritte und vierte Jahr 5 % und ab dem fünften Jahr 5,5 % Zinseszinsen berechnet.

a) Welcher Endwert ergibt sich am Ende des siebten Jahres, wenn die Zinszahlung nachschüssig erfolgt? (*Lösung:* $K_7 = 14\,137{,}04$)

b) Zu welchem gleich bleibenden jährlichen Zinsfuß wäre durch nachschüssige Verzinsung der gleiche Endwert erreicht worden? (*Lösung:* $p = 5{,}0703 \approx 5{,}07$)

Aufgabe 2.4
Berechnen Sie die Laufzeit eines Kapitals von Euro 20 000, das bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung mit Zinseszinsen zu 1,2 % auf Euro 24 790,15 angewachsen ist. (*Lösung:* $n = 18$)

Aufgabe 2.5
Eine Mutter zahlt bei nachschüssiger Verzinsung von 1,1% p.a. auf das Konto ihrer Tochter Euro 1 000 ein. Nach vier Jahren zahlt sie Euro 2 000 ein und nach weiteren vier Jahren zahlt sie Euro 3 000 ein.

a) Welcher Betrag steht der Tochter ein Jahr nach der letzten Einzahlung zur Verfügung? (*Lösung:* $K_9 = 6\,248{,}92$)

b) Drei Jahre nach der ersten Einzahlung der Mutter hebt die Tochter Euro 500 von dem Konto ab. Wie hoch ist dann der Kontostand ein Jahr nach der letzten Einzahlung? (*Lösung:* $K_9 = 5\,715{,}00$)

Aufgabe 2.6
Ein Schuldner hat bei 4,2% nachschüssigen Zinseszinsen p.a. folgende Zahlungsverpflichtung:

- Euro 20 000 nach vier Jahren
- Euro 10 000 nach acht Jahren
- Euro 5 000 nach elf Jahren

a) Durch welche sofortige Zahlung kann er seine gesamten Schulden zurückzahlen? (*Lösung:* $K_0 = 27\,340{,}65$)

b) Er möchte seine Schulden durch drei gleich große Beträge nach fünf bzw. nach sieben bzw. nach zehn Jahren zurückzahlen. Wie groß sind diese Beträge? (*Lösung:* $x = 12\,279{,}41$)

c) Er möchte seine Schulden wie folgt zurückzahlen:
   - Euro 10 000 nach zwei Jahren
   - Euro 15 000 nach neun Jahren
   - und die Restschuld nach elf Jahren

   Wie groß ist die Restschuld nach elf Jahren? (*Lösung:* 12 220,82)

Aufgabe 2.7
Ein Schuldner hat bei 8% nachschüssigen Zinseszinsen p.a. folgende Zahlungsverpflichtung:

- Euro 10 000 in drei Jahren
- Euro 20 000 in sieben Jahren

Statt der oben genannten Zahlungsverpflichtung

a) möchte er seine Schulden mit einer einmaligen Zahlung nach vier Jahren zurückzahlen. Wie hoch ist der einmalige Rückzahlungsbetrag? (*Lösung:* 26 676,64)

b) kann er sofort Euro 12 000 einzahlen und nach fünf Jahren die Restschuld. Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag nach fünf Jahren? (*Lösung:* 11 178,83)

Aufgabe 2.8
Sie nehmen einen Kredit in Höhe von Euro 100 000 auf und vereinbaren, nach einem Jahr Euro 60 000 zurückzuzahlen und nach einem weiteren Jahr Euro 50 000 zurückzuzahlen. Wie hoch ist der Effektivzins? (*Lösung:* 6,8115%)

Aufgabe 2.9
Bei einer Bank werden 50 000 € bei nachschüssiger Verzinsung zu 8% pro Jahr angelegt.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 30 Jahren?

b) Wie hoch ist das Guthaben nach 30 Jahren, wenn die Bank jährlich einen Ausgabeaufschlag von 1,5 % erhebt, also wenn der Jahreszins lediglich 6,5 % beträgt?

Lösung zu Aufgabe 2.1
$K_5 = 20\,000 \cdot 1{,}012^5 = 21\,229{,}15$

Lösung zu Aufgabe 2.2
$K_0 = 50\,000$

Lösung zu Aufgabe 2.3

a) $K_7 = 10\,000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}055^3 = 14\,137{,}04$

b) $q = \sqrt[7]{\dfrac{14\,137{,}04}{10\,000}} = 1{,}050703$
d.h. der gleich bleibende Zins beträgt $5{,}0703\% \approx 5{,}07\%$

Lösung zu Aufgabe 2.4
$$n = \frac{\ln \frac{24\,790{,}15}{20\,000}}{\ln 1{,}012} = 18 \text{ Jahre}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5

a) $$\begin{aligned} 1\,000 \cdot 1{,}011^9 + 2\,000 \cdot 1{,}011^5 + 3\,000 \cdot 1{,}011 &= \\ 1\,103{,}47 + 2\,112{,}45 + 3\,033 &= 6\,248{,}92 \end{aligned}$$

b) $6\,248{,}92 - 500 \cdot 1{,}011^6 = 5\,715{,}00$

Lösung zu Aufgabe 2.6

a) $$\begin{aligned} \frac{20\,000}{1{,}042^4} + \frac{10\,000}{1{,}042^8} + \frac{5\,000}{1{,}042^{11}} &= \\ 16\,965{,}21 + 7\,195{,}46 + 3{,}179{,}99 &= 27\,340{,}65 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 27\,340{,}65 &= \frac{x}{1{,}042^5} + \frac{x}{1{,}042^7} + \frac{x}{1{,}042^{10}} \\ 27\,340{,}65 &= \frac{x}{1{,}2284} + \frac{x}{1{,}3337} + \frac{x}{1{,}5090} \\ 27\,340{,}65 &= 0{,}8141x + 0{,}7498x + 0{,}6627x \\ 27\,340{,}65 &= 2{,}2265x \\ 12\,279{,}41 &= x \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 27\,340{,}65 &= \frac{10\,000}{1{,}042^2} + \frac{15\,000}{1{,}042^9} + \frac{x}{1{,}042^{11}} \\ 27\,340{,}65 &= 9\,210{,}11 + 10\,358{,}14 + \frac{x}{1{,}572334} \\ 7\,772{,}41 &= 0{,}635997x \\ 12\,220{,}82 &= x \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7

a) Wert der Schulden am Ende des 4. Jahres:
$10\,000 \cdot 1{,}08 + \frac{20\,000}{1{,}08^3} = 10\,800 + 15\,876{,}64 = 26\,676{,}64$
d.h. die Einmalzahlung am Ende des 4. Jahres beträgt 26 676,64 €.

b) Restschuld am Ende des 5. Jahres:
$26\,676{,}64 \cdot 1{,}08 - 12\,000 \cdot 1{,}08^5 = 11\,178{,}83$
d.h. die Restschuld am Ende des 5. Jahres beträgt 11 178,83 €.

Lösung zu Aufgabe 2.8

Der Effektivzins wird aus folgender Gleichung berechnet:

$$\boxed{100\,000 = \tfrac{60\,000}{q} + \tfrac{50\,000}{q^2}}$$

Diese Gleichung lösen wir wie folgt nach q auf:

$$\begin{aligned}
100\,000 &= \frac{60\,000}{q} + \frac{50\,000}{q^2} && | \cdot q^2 \\
100\,000 \cdot q^2 &= 60\,000 \cdot q + 50\,000 && | -100\,000q^2 \\
0 &= -100\,000 \cdot q^2 + 60\,000 \cdot q + 50\,000 && | \div -100\,000 \\
0 &= q^2 - 0{,}6 \cdot q - 0{,}5 \\
q &= 0{,}3 \pm \sqrt{0{,}09 + 0{,}5} \\
q &= 1{,}068115 \text{ oder } q = -0{,}4681146
\end{aligned}$$

d.h. der Effektivzins beträgt 6,81%.

Lösung zu Aufgabe 2.9

a) $K_{30} = 50\,000 \cdot 1{,}08^{30} = 503\,132{,}8$
d.h. das Guthaben beträgt 503 132,8 €

b) $K_{30} = 50\,000 \cdot 1{,}065^{30} = 330\,718{,}3$
d.h. das Guthaben beträgt 330 718,3 € und somit etwas mehr als die Hälfte von Teilaufgabe a).

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 3914
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt

Beispiel 1
Wie hoch ist bei nachschüssiger Verzinsung zu 8% p.a. der Kontostand nach sechs Jahren bei folgenden Zahlungsvorgängen:

- sofortige Einzahlung von 1 000 Euro
- Rückzahlung von 500 Euro nach zwei Jahren
- Einzahlung von 2 000 Euro nach drei Jahren
- Einzahlung von 400 Euro nach fünf Jahren

Lösung: 3 858,05 Euro

Beispiel 2
Aus einer Schenkung werden nach zwei Jahren 2 000 Euro entnommen und nach drei Jahren 500 Euro eingezahlt, so dass nach fünf Jahren der Kontostand 22 624,13 Euro beträgt. Wie hoch war der Schenkungsbetrag bei nachschüssiger Verzinsung zu 4% p.a.?

Lösung: 20 000 Euro

Beispiel 3
Aus einer Einzahlung von 10 000 Euro werden zwei gleich hohe Beträge entnommen, und zwar nach drei Jahren und nach fünf Jahren, so dass bei nachschüssiger Verzinsung zu 5% p.a. der Kontostand nach acht Jahren 10 150,13 Euro beträgt. Wie hoch waren die beiden entnommen Beträge?

Lösung: 1 900 Euro

Beispiel 4
10 000 Euro werden zehn Jahre zu 1,2% p.a., anschließend fünfzehn Jahre zu 1,3% p.a. und danach fünf Jahre zu 1,4% nachschüssigen Jahreszinsen angelegt.

a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende der Laufzeit von dreißig Jahren?
Lösung: 14 660,09 Euro

b) Wann überschreitet das Guthaben erstmals den Betrag von 13 000 Euro?
Lösung: nach 22 Jahren

c) Wie hoch ist der jährliche Effektivzins? *Lösung: 1,28331 % (Das Ergebnis* $1{,}28\overline{3}$ *% ist falsch!)*

Lösung zu Beispiel 1

$1\,000 \cdot 1{,}08^6 - 500 \cdot 1{,}08^4 + 2\,000 \cdot 1{,}08^3 + 400 \cdot 1{,}08 = 3\,858{,}05$

Lösung zu Beispiel 2

$x \cdot 1{,}04^5 - 2\,000 \cdot 1{,}04^3 + 500 \cdot 1{,}04^2 = 22\,624{,}13 \Leftrightarrow x = 20\,000$

Lösung zu Beispiel 3

a) $K_{10} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{10} = 11\,266{,}92$
$K_{25} = 11\,266{,}92 \cdot 1{,}013^{15} = 13\,675{,}61$
$K_{30} = 13\,675{,}61 \cdot 1{,}014^5 = 14\,660{,}09$

b) $n = \dfrac{\ln \frac{13\,000}{11\,266{,}92}}{\ln 1{,}013} = 11{,}08$
d.h. nach $10 + 12 = 22$ Jahren.

c) $14\,660{,}09 = 10\,000 \cdot q^{30} \Leftrightarrow q = \sqrt[30]{\dfrac{14\,660{,}09}{10\,000}} = 1{,}0128331$
d.h. 1,28331%.

Lösung zu Beispiel 4

a) *1. Lösungsweg:*
$K_{30} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{10} \cdot 1{,}013^{15} \cdot 1{,}014^5 = 14\,660{,}09$
d.h. das Guthaben nach dreißig Jahren beträgt 14 660,09 Euro.
2. Lösungsweg:
$K_{10} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{10} = 11\,266{,}92$
$K_{25} = 11\,266{,}92 \cdot 1{,}013^{15} = 13\,675{,}61$
$K_{30} = 13\,675{,}61 \cdot 1{,}014^5 = 14\,660{,}09$

b) $n = \dfrac{\ln[13\,000 \div 11\,266{,}92]}{\ln 1{,}013} = 11{,}07743$
d.h. nach 10+12=22 Jahren wird erstmals der Betrag von 13 000 Euro überschritten.

c) $q = \sqrt[30]{\dfrac{14\,660{,}09}{10\,000}} = 1{,}0128331002$
d.h. der jährliche Effektivzins beträgt 1,28331 %.
(Das Ergebnis $1{,}28\overline{3}$ ist falsch!)