Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Sprechstunde nach Vereinbarung via Skype
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Unterjährliche Verzinsung zum relativen Zinsfuß

Hinweis: Das Übungsblatt 3 zur vorschüssigen Verzinsung entfällt im Ss 2020.

Aufgabe 4.1

Der nominelle Jahreszins betrage 4%. Auf welches Endkapital wachsen GE 10 000

a) nach sechzehn Jahren und neun Monaten bei quartalsweiser Verzinsung zum relativen Zins an? Und wie groß ist der jährliche Effektivzins?

b) nach sechzehn Jahren und zehn Monaten bei quartalsweiser Verzinsung zum relativen Zins an?

Aufgabe 4.2

Am 31.03.2017 wurde bei einem Privatverleiher ein Darlehn in Höhe von GE 20 000 bei vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zinsfuß und einem jährlichen Nominalzinsfuß von 8% aufgenommen.

a) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

b) Das Darlehn soll am 30.09.2021 zurückgezahlt werden.

   1. Wie hoch ist die rückzuzahlende Summe?
   2. Am Ende von welchem Quartal wurde der Schuldenstand von GE 25 000 erstmals überschritten?

c) Welche Zwischenzahlung zum 30.06.2019 würde den am 30.09.2021 rückzuzahlenden Betrag auf GE 20 000 reduzieren?

Aufgabe 4.3

Eine Bank gewährt ihren Kunden üblicherweise 1,2% Jahreszinsen. Auf besonderen Wunsch werden die Zinsen zwölf Mal jährlich ausgeschüttet, wobei der effektive Jahreszinsfuß von 1,2% aber nicht überschritten werden darf. Wie groß muss der konforme monatliche Zinssatz sein? Und auf welches Guthaben ist ein Kapital von GE 10 000 nach sieben Jahren und vier Monaten angewachsen?

Lösung zu Aufgabe 4.1

a) $K_{16,75} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4 \cdot 16{,}75} = 10\,000 \cdot 1{,}01^{67} = 19\,477{,}45$

Effektivzins
$j = \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}040604 = 4{,}0604\%$

b) $K_{16,8\overline{3}} = K_{16,75} = 19\,477{,}45$

Lösung zu Aufgabe 4.2

a) Effektivzins
$j = \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}08243216 \approx 8{,}24\%$

b) 1. $K_{4,5} = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4 \cdot 4{,}5} = 20\,000 \cdot 1{,}02^{18} = 28\,564{,}92$

2. $n = \frac{\ln \frac{25\,000}{20\,000}}{\ln 1{,}08243216} = 2{,}817$ Jahre
$2{,}817 \cdot 4 = 11{,}3$ Quartale
d.h. nach 12 Quartalen, also am 30.03.2020

c) 30.09.2021 =Tag der Wertstellung
1. Lösungsweg:
Wert der Schulden am 30.09.2021 : $20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4 \cdot 4{,}5} = 20\,000 \cdot 1{,}02^{18} = 28\,564{,}92$
Wert der Rückzahlungen am 30.09.2021: $x \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4 \cdot 2{,}25} + 20\,000 = x \cdot 1{,}02^{9} + 20\,000 = 1{,}1951x + 20\,000$

$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 28\,564{,}92 &= 1{,}1951x + 20\,000 \\ 8\,564{,}92 &= 1{,}1951x \\ x &= 7\,166{,}70 \end{aligned}$$

d.h. die Zwischenzahlung am 30.06.2019 beträgt 7 166,70 Euro.

2. Lösungsweg:
Wert der Schulden am 30.09.2021 : $20\,000 \cdot 1{,}08243216^{4{,}25} = 28\,564{,}92$
Wert der Rückzahlungen am 30.09.2021: $x \cdot 1{,}08243216^{2{,}25} + 20\,000 = 1{,}1951x + 20\,000$

$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 28\,564{,}92 &= 1{,}1951x + 20\,000 \\ 8\,564{,}92 &= 1{,}1951x \\ x &= 7\,166{,}70 \end{aligned}$$

d.h. die Zwischenzahlung am 30.06.2019 beträgt 7 166,750 Euro.

Lösung zu Aufgabe 4.3
Konformer unterjährlicher Zinsfaktor:
$q^{1/m} = 1{,}012^{1/12} = 1{,}000995$
d.h. der konforme monatliche Zins beträgt 0,0995%

$K_{7,\overline{3}} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{7,\overline{3}} = 10\,914{,}16$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt (Finanzmathematik)

Beispiel
Ein Startkapital von 10 000 Euro zu 1,12% nominellen Jahreszinsen angelegt.

1. Wie hoch ist das Guthaben nach einer Laufzeit von zwei Jahren und sieben Monaten bei
   a) linearer Verzinsung?
   b) nachschüssiger Verzinsung?
   c) vorschüssiger Verzinsung?
   d) vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins?
   e) konformer Verzinsung?
2. Wie hoch ist das Guthaben am Ende der Laufzeit von drei Jahren und wie hoch ist der Effektivzins (d.h. der Jahreszins, der bei nachschüssiger Verzinsung nach drei Jahren zu dem selben Dreijahres-Guthaben führen würde) bei
   a) linearer Verzinsung?
   b) nachschüssiger Verzinsung?
   c) vorschüssiger Verzinsung?
   d) vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins?
   e) konformer Verzinsung?

Ergebnisse:

1. a) Endguthaben = 10 289,33 Euro
   b) Endguthaben = 10 225,25 Euro
   c) Endguthaben = 10 227,82 Euro
   d) Endguthaben = 10 283,55 Euro
   e) Endguthaben = 10 291,90 Euro
2. a) Endguthaben = 10 336 Euro und Effektivzins = 1,107 685%
   b) Endguthaben = 10 339,78 Euro und Effektivzins = 1,12%
   c) Endguthaben = 10 343,67 Euro und Effektivzins = 1,132 688%
   d) Endguthaben = 10 341,22 Euro und Effektivzins = 1,124 713%
   e) Endguthaben = 10 339,78 Euro und Effektivzins = 1,12%

Lösung:

1. a) $K_{2+\frac{7}{12}} = 10\,000 \cdot \left(1 + \left(2 + \frac{7}{12}\right) \cdot 0{,}0112\right) = 10\,289{,}33$

   b) $K_{2+\frac{7}{12}} = K_2 = 10\,000 \cdot 1{,}0112^2 = 10\,225{,}25$

   c) $K_{2+\frac{7}{12}} = K_2 = \frac{10\,000}{0{,}9888^2} = 10\,227{,}82$

   d) $K_{2+\frac{7}{12}} = K_{2,5} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0112}{4}\right)^{2,5\cdot 4} = 10\,283{,}55$

   e) $K_{2+\frac{7}{12}} = 10\,000 \cdot 1{,}0112^{2+\frac{7}{12}} = 10\,291{,}90$

2. a) $K_3 = 10\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}0112) = 10\,336$

   $q = \sqrt[3]{\frac{10\,336}{10\,000}} = 1{,}01107685$

   b) $K_3 = 10\,000 \cdot 1{,}0112^3 = 10\,339{,}78$

   $q = \sqrt[3]{\frac{10\,339{,}78}{10\,000}} = 1{,}0112$

   c) $K_3 = \frac{10\,000}{0{,}9888^3} = 10\,343{,}67$

   $q = \sqrt[3]{\frac{10\,343{,}67}{10\,000}} = 1{,}0113269$

   2. Lösungsweg:

   $i' = \frac{0{,}0112}{0{,}9888} = 0{,}0113269$

   d) $K_3 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0112}{4}\right)^{3\cdot 4} = 10\,341{,}22$

   $q = \sqrt[3]{\frac{10\,341{,}22}{10\,000}} = 1{,}01124713$

   2. Lösungsweg:

   $j = \left(1 + \frac{0{,}0112}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}01124713$

   e) $K_3 = 10\,000 \cdot 1{,}0112^3 = 10\,339{,}78$

   $q = \sqrt[3]{\frac{10\,339{,}78}{10\,000}} = 1{,}0112$