Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM II (Finanzmathematik)

Gemischte Verzinsung

Aufgabe 5.1
Ein Anleger zahlt am 30.09.2012 bei seiner Bank GE 20 000 zu 1,2% jährlichen Zinseszinsen ein. Am 11.01.2015 hebt er das Guthaben samt Zinsen ab. Welchen Betrag erhält er bei
a) relativ gemischter Verzinsung? (*Lösung:* $K_{2,280\overline{5}} = 20\,551{,}84$)
b) bankmäßiger gemischter Verzinsung? (*Lösung:* $K_{2,280\overline{5}} = 20\,551{,}86$ oder Taggenau 20 552,09)

Aufgabe 5.2
Ein Kapital in Höhe von 10 000 € wird fünfzehn Jahre und drei Monate zu nominell 1,2% p.a. verzinst. Welches Endkapital ergibt sich
a) bei nachschüssiger Verzinsung? (*Lösung:* 11 959,35 €)
b) bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zinsfuß? (*Lösung:* 12 007,05 €)
c) bei täglicher Verzinsung zum relativen Zinsfuß? (*Lösung:* 12 008,11 €)
d) bei stetiger (kontinuierlicher) Verzinsung? (*Lösung:* 12 008,14 €)
e) bei konformer Verzinsung? (*Lösung:* 11 995,07 €)

Aufgabe 5.3
Statt der Rückzahlung einer Schuld von 100 000 € am 31.10.2012 werden bei relativ gemischter Verzinsung mit 5,8% Jahreszinsen folgende Rückzahlungen vereinbart:

- 60 000 € am 31.03.2013
- zwei gleich große Rückzahlungen am 31.10.2014 und am 31.12.2014

Wie hoch sind die Zahlungen am 31.10.2014 und am 31.12.2014, wenn als Bewertungsstichtag der

a) 31.12.2014 (*Lösung:* 23 276,03 €)

b) 31.03.2013 (*Lösung:* 23 305,53 €)

c) 31.10.2012 (*Lösung:* 23 291,16)

festgesetzt wird?

Aufgabe 5.4
Ein Kapital hat sich bei stetiger Verzinsung nach einer Laufzeit von sieben Jahren, zwei Monaten und zwölf Tagen verdoppelt. Wie hoch war der nominelle Jahreszins?

Lösung zu Aufgabe 5.1

a) 3 Monate + 11 Tage = 101 Tage
$\gamma = \dfrac{101}{360} = 0{,}280\overline{5}$ Jahre
$K_{2,280\overline{5}} = 20\,000 \cdot 1{,}012^2 \cdot \left(1 + 0{,}280\overline{5} \cdot 0{,}012\right) = 20\,551{,}84$
d.h. das Guthaben beträgt 20 551,84 GE.

b) $K_{2,280\overline{5}} = 20\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{3}{12} \cdot 0{,}012\right) \cdot 1{,}012^2 \cdot \left(1 + \dfrac{11}{360} \cdot 0{,}012\right) = 20\,551{,}86$
d.h. das Guthaben beträgt 20 551,86 GE.
2. Lï¿½sung Tag-genau:
$\gamma_1 = \dfrac{31+30+31}{366} = 0{,}2513661$
$\gamma_2 = \dfrac{11}{365} = 0{,}03013699$
$K_{2,2815031} = 20\,000 \cdot (1 + \gamma_1 \cdot 0{,}012) \cdot 1{,}012^2 \cdot (1 + \gamma_2 \cdot 0{,}012) = 20\,552{,}09$

Lösung zu Aufgabe 5.2

a) $K_{15,25} = K_{15} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{15} = 11\,959{,}35$
d.h. das Guthaben beträgt 11 959,35 €.

b) $K_{15,25} = 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}012}{12}\right)^{15{,}25 \cdot 12} = 12\,007{,}05$
d.h. das Guthaben beträgt 12 007,05 €.

c) $K_{15,25} = 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}012}{360}\right)^{15{,}25 \cdot 360} = 12\,008{,}11$
d.h. das Guthaben beträgt 12 008,11 €.

d) $K_{15,25} = 10\,000 \cdot e^{15{,}25 \cdot 0{,}012} = 10\,000 \cdot e^{0{,}183} = 12\,008{,}14$
d.h. das Guthaben beträgt 12 008,14 €.

e) $K_{15,25} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{15{,}25} = 11\,995{,}07$
d.h. das Guthaben beträgt 11 995,07 €.

Lösung zu Aufgabe 5.3

a) Wert der Schulden am 31.12.2014:
$100\,000 \cdot 1{,}058^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}058\right) = 113\,018{,}45$
Wert der Rückzahlungen am 31.12.2014:

- $60\,000 \cdot 1{,}058 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}058\right) = 66\,241{,}38$
- $x \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}058\right) = 1{,}009667\,x$
- x

$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 113\,018{,}45 &= 66\,241{,}38 + 1{,}009667\,x + x \\ 46\,777{,}07 &= 2{,}009667\,x \\ x &= 23\,276{,}03 \end{aligned}$$

d.h. die beiden gleich hohen Rückzahlungen betragen jeweils 23 276,03 €.

b) Wert der Schulden am 31.03.2013:
$100\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}058\right) = 102\,416{,}67$

Wert der Rückzahlungen am 31.03.2013:

- $60\,000$
- $\dfrac{x}{1{,}058 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}058\right)} = \dfrac{x}{1{,}093796} = 0{,}9142475\,x$
- $\dfrac{x}{1{,}058 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}058\right)} = \dfrac{x}{1{,}104023} = 0{,}9057782\,x$

$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 102\,416{,}67 &= 60\,000 + 0{,}9142475\,x + 0{,}9057782\,x \\ 42\,416{,}67 &= 1{,}820026\,x \\ x &= 23\,305{,}53 \end{aligned}$$

d.h. die beiden gleich hohen Rückzahlungen betragen jeweils 23 305,53 €.

c) Wert der Schulden am 31.10.2012:
$100\,000$

Wert der Rückzahlungen am 31.10.2012:

- $\dfrac{60\,000}{1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}058} = 58\,584{,}21$
- $\dfrac{x}{1{,}058^2} = \dfrac{x}{1{,}119364} = 0{,}8933644\,x$
- $\dfrac{x}{1{,}058^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}058\right)} = \dfrac{x}{1{,}130185} = 0{,}8848113\,x$

$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 100\,000 &= 58\,584{,}21 + 0{,}8933644\,x + 0{,}8848113\,x \\ 41\,415{,}79 &= 1{,}778176\,x \\ x &= 23\,291{,}16 \end{aligned}$$

d.h. die beiden gleich hohen Rückzahlungen betragen jeweils 23 291,16 €.

Lösung zu Aufgabe 5.4

$n = 7 + \dfrac{2}{12} + \dfrac{12}{360} = 7 + \dfrac{72}{360} = 7{,}2$

$K_{7,2} = 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot e^{7,2i} \qquad \mid \div K_0$

$2 = e^{7,2i} \qquad \mid \ln$

$$\ln 2 = \ln(e^{7{,}2i}) = 7{,}2i \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = 7{,}2i \qquad | \div 7{,}2$$

$$i = \frac{\ln 2}{7{,}2} = 0{,}09627$$

d.h. der nominelle Jahreszins betrug 9,627%.

Übersicht

$p = 4\%$ Nominalzinsfuß pro Jahr
$n = 3$ Jahre bzw. 3,5 Jahre Laufzeit
$\boxed{K_0 = 100}$

lineare Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100(1+3\cdot 0{,}04) \\ &= 112 \\ K_{3{,}5} &= 100(1+3{,}5\cdot 0{,}04) \\ &= 114 \end{aligned}}$$

relativ gemischte Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100\cdot 1{,}04^3 \\ &= 112{,}49 \\ K_{3{,}5} &= 100\cdot 1{,}04^3\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}04\right) \\ &= 114{,}74 \end{aligned}}$$

nachschüssige Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100\cdot 1{,}04^3 \\ &= 112{,}49 \\ K_{3{,}5} &= \text{ nicht erklärt} \\ \text{bzw. } K_{3{,}5} &= K_3 \end{aligned}}$$

vorschüssige Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= \tfrac{100}{0{,}96^3} \\ &= 113{,}03 \\ K_{3{,}5} &= \text{ nicht erklärt} \\ \text{bzw. } K_{3{,}5} &= K_3 \end{aligned}}$$

konforme Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100\cdot 1{,}04^3 \\ &= 112{,}49 \\ K_{3{,}5} &= 100\cdot 1{,}04^{3{,}5} \\ &= 114{,}71 \end{aligned}}$$

stetige Verzinsung

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100\cdot e^{3\cdot 0{,}04} \\ &= 112{,}75 \\ K_{3{,}5} &= 100\cdot e^{3{,}5\cdot 0{,}04} \\ &= 115{,}03 \end{aligned}}$$

Verzinsung zum relativen Zins $\frac{i}{m}$

täglich:	$m = 360$
<u>monatlich</u>:	$m = 12$
quartalsmäßig:	$m = 4$
halbjährlich:	$m = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} K_3 &= 100\left(1+\tfrac{0{,}04}{12}\right)^{36} \\ &= 112{,}73 \\ K_{3{,}5} &= 100\left(1+\tfrac{0{,}04}{12}\right)^{42} \\ &= 115{,}00 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_{\text{effektiv}} &= \left(1+\tfrac{0{,}04}{12}\right)^{12} = 1{,}040742 \\ p_{\text{effektiv}} &= 4{,}0742\% \end{aligned}}$$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Relativ gemischte Verzinsung
Arbeitsblatt

Aufgabe 6 (Klausur vom 28.01.2008)
Ein Schuldner hat bei relativ gemischter Verzinsung mit 6% Jahreszinsen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 40 000 € am 31.03.2008
- 60 000 € am 31.12.2010
- 20 000 € am 31.12.2011

Statt diesen Zahlungsverpflichtungen möchte der Schuldner

a) seine Schuld mit einer einmaligen Zahlung am 01.01.2008 zurückzahlen. Wie hoch ist der einmalige Rückzahlungsbetrag? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

b) 20 000 € am 01.01.2008 zurückzahlen und nach vier Jahren die verbleibende Restschuld. Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag nach vier Jahren? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

c) die gesamte Schuld in drei gleich großen Beträgen am 01.01.2009, am 30.06.2010 und am 01.04.2011 zurückzahlen. Wie hoch werden diese Rückzahlungsbeträge sein? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\dfrac{40\,000}{1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06}+\dfrac{60\,000}{1{,}06^3}+\dfrac{20\,000}{1{,}06^4}=39\,408{,}87+50\,377{,}16+15\,841{,}87=105\,627{,}90$

d.h. die Rückzahlung beträgt 105 627,90 € .

b) Schulden = Rückzahlungen

$105\,627{,}90=20\,000+\dfrac{x}{1{,}06^4}\Rightarrow x=108\,103{,}25$

d.h. die Rückzahlung nach vier Jahren beträgt 108 103,25 € .

c) Schulden = Rückzahlungen

$$\begin{aligned}
105\,627{,}90 &= \frac{x}{1{,}06}+\frac{x}{1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}06\right)}+\frac{x}{1{,}06^3\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06\right)}\\
105\,627{,}90 &= 0{,}9434x+0{,}8641x+0{,}8272x\\
105\,627{,}90 &= 2{,}6347x\\
x &= 40\,091{,}05
\end{aligned}$$

d.h. die einheitliche Rückzahlung beträgt jeweils 40 091,05 € .

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Jährlicher Effektivzins

Wurde für eine beliebige Verzinsungsart das Endguthaben K_n, das sich nach n Jahren aus einem Startkapital K_0 ergibt, berechnet, so ist der jährliche Effektivzins der Zins, der bei nachschüssiger Verzinsung zu dem gleichen Endguthaben führt. Der Effektiv-Zinsfaktor q berechnet sich wie folgt:

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

Beispiel
Startkapital: 1 000 GE
Laufzeit: vier Jahre
nomineller Jahreszins: 1,2%

1. **lineare Verzinsung**
   $K_4 = 1\,000(1 + 4 \cdot 0{,}012) = 1\,048$
   $q = \sqrt[4]{\frac{1\,048}{1\,000}} = 1{,}011790 \widehat{=} 1{,}1790\%$ p.a.
   Effektivzins=1,1790% p.a.
   Probe: $1\,000 \cdot 1{,}011790^4 = 1\,048{,}001$

2. **nachschüssige Verzinsung**
   $K_4 = 1\,000 \cdot 1{,}012^4 = 1\,048{,}87$
   Effektivzins=1,2% p.a.

3. **vorschüssige Verzinsung**
   $K_4 = \frac{1\,000}{0{,}988^4} = 1\,049{,}48$
   1. Lösungsweg:
   $q = \sqrt[4]{\frac{1\,049{,}48}{1\,000}} = 1{,}012147 \widehat{=} 1{,}2147\%$ p.a.
   Rundungsungenauigkeit
   2. Lösungsweg:
   $i' = \frac{0{,}012}{0{,}988} = 0{,}012146 \widehat{=} 1{,}2146\%$
   Effektivzins=1,2146% p.a.
   Probe: $1\,000 \cdot 1{,}012146^4 = 1\,049{,}48$

4. **monatliche Verzinsung zum relativen Zins**
   $K_4 = 1\,000\left(1+\dfrac{0{,}012}{12}\right)^{4\cdot 12} = 1\,049{,}15$
   1. Lösungsweg:
   $q = \sqrt[4]{\dfrac{1\,049{,}15}{1\,000}} = 1{,}012067 \widehat{=} 1{,}2067\%$ p.a.
   Rundungsungenauigkeit
   2. Lösungsweg:
   $j = \left(1+\dfrac{0{,}012}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}012066 \widehat{=} 1{,}2066\%$
   Effektivzins=1,2066% p.a.
   Probe: $1\,000 \cdot 1{,}012066^4 = 1\,049{,}15$

5. **konforme Verzinsung**
   $K_4 = 1\,000 \cdot 1{,}012^4 = 1\,048{,}87$
   Effektivzins=1,2% p.a.

6. **relativ gemischte Verzinsung**
   $K_4 = 1\,000 \cdot 1{,}012^4 = 1\,048{,}87$
   $q = \sqrt[4]{\dfrac{1\,048{,}87}{1\,000}} = 1{,}012000 \widehat{=} 1{,}2000\%$ p.a.
   Effektivzins=1,2% p.a.
   Probe: $1\,000 \cdot 1{,}012^4 = 1\,048{,}87$

7. **stetige Verzinsung**
   $K_4 = 1\,000 \cdot e^{4\cdot 0{,}012} = 1\,049{,}17$
   $q = \sqrt[4]{\dfrac{1\,049{,}17}{1\,000}} = 1{,}012072 \widehat{=} 1{,}2072\%$ p.a.
   Effektivzins=1,2072% p.a.
   Probe: $1\,000 \cdot 1{,}012072^4 = 1\,049{,}17$