Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Nachschüssige Jahresrenten

Aufgabe 6.1

Für Ihre Ausbildungszeit von vier Jahren möchte Ihnen eine wohlmeinende Tante Ihre Ausbildungsvergütung aufbessern. Dazu stellt sie Ihnen zwei Alternativen vor:

a) Ein Betrag in Höhe von 40 000 € wird zu 4,2% Zinseszinsen angelegt und Ihnen in vier gleichhohen Rentenzahlungen ausgezahlt. Die erste Zahlung erfolgt am Ende des ersten Jahres, sodass die letzte Zahlung als Startkapital für das Berufsleben gelten kann. Wie hoch sind die vier Rentenzahlungen? (*Lösung:* 11 071,59 €)

b) Als zweite Alternative bietet sie Ihnen an, nachschüssig viermal 10 000 € auszuzahlen. Da Sie jedoch zu Beginn Ihrer Ausbildung einen Wagen anschaffen wollen, können Sie sich diese Rente ebenfalls unter Berücksichtigung von 4,2% Jahreszinseszinsen zu Beginn der Ausbildung kapitalisieren lassen. Welchen Betrag bekommen Sie dabei auf die Hand? (*Lösung:* 36 128,51 €)

Aufgabe 6.2

Von einem Lottogewinn werden 10 000 € ab 01.01.2012 zu 1,2% nachschüssig verzinst. Berechnen Sie den Kontostand am 01.01.2017, wenn bis dahin in jedem Jahr jeweils am Jahresende 1 000 € abgehoben worden sind. (*Lösung:* 5 493,13 €)

Aufgabe 6.3

Sie haben im Lotto 12 000 € gewonnen. Das Geld wollen Sie sich als jährliche Rente in Höhe von 1 000 € zukommen lassen. Der erste Auszahlungsbetrag wird genau ein Jahr nach der Einzahlung des Lottogewinns fällig. Wie oft können Sie bei 1,2% jährlichen Zinseszinsen die volle Rente beziehen? (*Lösung:* 13-mal)

Aufgabe 6.4

Sie zahlen jeweils am Ende eines Jahres 500 € ein. Wann übersteigt bei 1,2% jährlichen Zinseszinsen das Guthaben erstmals den Betrag von 10 000 €? (*Lösung:* nach 19 Jahren)

Aufgabe 6.5

Am 31.12.2012 beträgt der Kontostand einer Studentin 5 000 €. In den Jahren 2013 bis 2016 zahlt sie jeweils am Ende des Jahres 800 € ein. Am 31.12.2017 hebt sie 1 000 € ab. Wie lange kann sie anschließend eine jährliche nachschüssige Rente über 1 500 € beziehen? Die Zinseszinsen betragen immer 3,25% jährlich. (*Lösung:* 6 Jahre lang)

Lösung zu Aufgabe 6.1:

a) *1. Lösungsweg:*

$$40\,000 = r \cdot \frac{1{,}042^4 - 1}{0{,}042} \cdot \frac{1}{1{,}042^4} \Leftrightarrow r = 11\,071{,}59$$

d.h. die jährlich nachschüssige Rente beträgt 11 071,59 €.

2. Lösungsweg:

$$40\,000 \cdot 1{,}042^4 = 47\,155{,}34$$

$$47\,155{,}34 = r \cdot \frac{1{,}042^4 - 1}{0{,}042} \Leftrightarrow r = 11\,071{,}59$$

b) $$R_0 = 10\,000 \cdot \frac{1{,}042^4 - 1}{0{,}042} \cdot \frac{1}{1{,}042^4} = 36\,128{,}51$$

d.h. der Barwert der Rente beträgt 36 128,51 €.

Lösung zu Aufgabe 6.2:

$$10\,000 \cdot 1{,}012^5 - 1\,000 \cdot \frac{1{,}012^5 - 1}{0{,}012} = 5\,493{,}125$$

d.h. der Kontostand beträgt 5 493,13 €.

Lösung zu Aufgabe 6.3:

$R_0 = 12\,000$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{12\,000}{1\,000} \cdot 0{,}012\right]}{\ln 1{,}012} = 13{,}03466$$

d.h. die volle Rente kann dreizehnmal bezogen werden.

Lösung zu Aufgabe 6.4:

$R_n = 10\,000$

$$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{10\,000}{500} \cdot 0{,}012\right]}{\ln 1{,}012} = 18{,}03329$$

d.h. nach neunzehn Jahren.

Lösung zu Aufgabe 6.5:

Kontostand am 01.01.2018:

$$5\,000 \cdot 1{,}0325^5 + 800 \cdot \frac{1{,}0325^4 - 1}{0{,}0325} \cdot 1{,}0325 - 1\,000 = 8\,335{,}645$$

$R_0 = 8\,335{,}645$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{8\,335{,}645}{1\,500} \cdot 0{,}0325\right]}{\ln 1{,}0325} = 6{,}227981$$

d.h. die volle Rente kann sechs Jahre lang bezogen werden.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Arbeitsblatt (Jährlich nachschüssige Renten)

Aufgabe

Ein Unternehmen kauft eine Maschine auf Raten. In den Ratenzahlungen ist ein Zinsfuß von 7% pro Jahr enthalten.

a) Das Unternehmen vereinbart, auf die Dauer von sieben Jahren jährlich nachschüssig Kaufpreisraten von je 4 000 GE zu zahlen. Wie hoch ist der Kaufpreis der Maschine? (*Lösung: 21 557,16*)

b) Da Liquiditätsschwierigkeiten auftreten, wird das folgende Umschuldungsmodell erörtert: Das Unternehmen setzt vier Jahre mit der Zahlung aus und zahlt anschließend drei Jahre lang entsprechend höhere nachschüssige Jahresraten. Wie hoch sind die Jahresraten? (*Lösung: 10 767,39*)

c) Ein anderes Umschuldungsmodell ist das folgende: Das Unternehmen setzt vier Jahre mit der Zahlung aus und zahlt danach jährlich nachschüssig 4 000 GE für eine entsprechend längere Zeit.

   1. Wie viele volle Jahresraten sind zu zahlen? (*Lösung: zehn volle Raten*)
   2. Wie hoch ist die Restzahlung, wenn sie ein Jahr nach der letzten vollen Jahresrate fällig sein soll? (*Lösung: 342,48*)

Lösung:

a) $R_0 = 4\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^7 - 1}{0{,}07} \cdot \dfrac{1}{1{,}07^7} = 21\,557{,}16$

d.h. der Kaufpreis der Maschine beträgt 21 557,16 Euro.

b) *1. Lösungsweg:*

Barwert der Rente $= 21\,557{,}16 \cdot 1{,}07^4 = 28\,257{,}04$

$28\,257{,}04 = r \cdot \dfrac{1{,}07^3 - 1}{0{,}07} \cdot \dfrac{1}{1{,}07^3} \Leftrightarrow r = 10\,767{,}39$

d.h. die Rate beträgt 10 767,39 Euro.

2. Lösungsweg:

Endwert der Rente $= 21\,557{,}16 \cdot 1{,}07^7 = 34\,616{,}09$

$34\,616{,}09 = r \cdot \dfrac{1{,}07^3 - 1}{0{,}07} \Leftrightarrow r = 10\,767{,}39$

c) 1. $n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{28\,257{,}04}{4\,000} \cdot 0{,}07\right)}{\ln 1{,}07} = 10{,}083$

d.h. es sind zehn volle Raten zu zahlen.

2. $K_{10} = 28\,257{,}04 \cdot 1{,}07^{10} - 4\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} = 320{,}08$

$320{,}08 \cdot 1{,}07 = 342{,}48$

d.h. die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzen vollen Rate beträgt 342,48 Euro.