3.3 Gemischte Verzinsung

Hauptaufgabe: Endguthaben berechnen, auf das ein Startkapital nach k vollen Jahren und einem Jahresbruchteil γ anwächst, wobei die vollen Jahren mit einem anderen Zinsmodell verzinst werden als der Jahresbruchteil γ (lies: Gamma).

Die Laufzeit n wird zerlegt in die Anzahl k der vollen Jahre und dem Jahresbruchteil $\gamma \in (0,1)$: $n = k + \gamma$

Beispiel:

$n =$ 5 Jahre, 8 Monate, 27 Tage. Dann betragen $k = 5$ und

$$\gamma = \frac{8}{12} + \frac{27}{360} = 0{,}741\bar{6} \text{ Jahre}$$

Die Bezeichnung „gemischte" Verz. rührt daher, dass die k vollen Jahre nachschüssig und der Jahresbruchteil γ linear verzinst werden, also zwei Verzinsungsmodelle „gemischt" auftreten.

3.3.1 Relativ gemischte Verz.

Während die bankmäßig gemischte Verz. (nächstes Kapitel) nur Kalenderjahre als volle Jahre zählt, macht die relativ gemischte Verz. diesen Unterschied nicht.

Beispiel:

Am 09.11.2020 werden 10 000 € eingezahlt zu 0,8% Jahreszinsen. Wie hoch ist das Guthaben am 10.12.2025 bei relativ gemischter Verz.?

$$n = \frac{21}{360} + \frac{30}{360} + 4 + \frac{340}{360} = 4 + \frac{391}{360} = 5 + \frac{31}{360} = 5{,}086\bar{1} \text{ Jahre}$$

$k = 5$ Jahre und $\gamma = 0{,}086\bar{1}$ Jahre

$$K_n = 10\,000 \cdot 1{,}008^5 \, (1 + 0{,}086\bar{1} \cdot 0{,}008) = 10\,413{,}62 \text{ €}$$

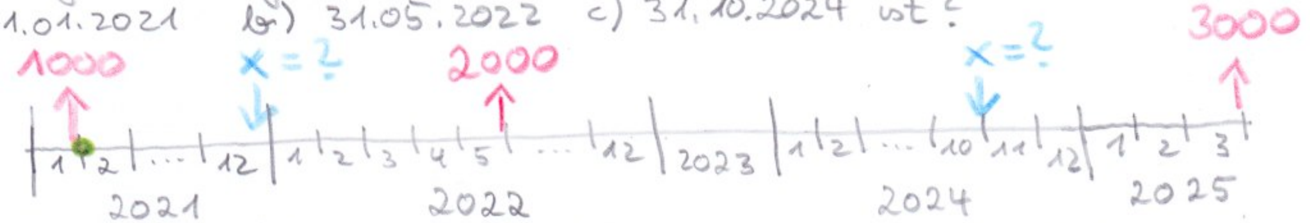
Da die lineare Verz. bei der relativ gemischten Verz. einfließt, müssen wir bei Vorliegen mehrerer Teilbeträge zunächst alle Teilbeträge am Bewertungsstichtag zusammenfassen.

Beispiel:

Es besteht folgende Zahlungsverpflichtung: 1000 € am 31.01.2021, 2000 € am 31.05.2022 und 3000 € am 31.03.2025. Die Schulden sollen durch zwei gleich hohe Beträge am 31.12.2021 und am 31.10.2024 zurückgezahlt werden bei relativ gemischter Verz. mit dem Jahreszins 0,3%. Wie hoch sind die beiden gleich großen Rückzahlungsbeträge, wenn der Bewertungsstichtag der

a) 31.01.2021 b) 31.05.2022 c) 31.10.2024 ist?

zu a)



Schulden = Rückzahlungen Wertstellung am 31.01.2021

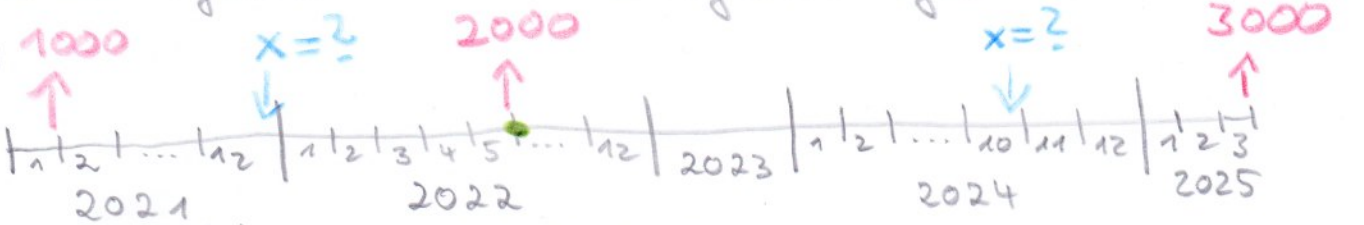
$$1000 + \frac{2000}{1{,}003 \cdot (1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}003)} + \frac{3000}{1{,}003^4 \cdot (1+\frac{2}{12}\cdot 0{,}003)} = 5954{,}81$$

$$\frac{x}{1+\frac{11}{12}\cdot 0{,}003} + \frac{x}{1{,}003^3 \cdot (1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}003)} = \frac{1}{1{,}00275}\cdot x + \frac{1}{1{,}011297}\cdot x =$$

$1{,}986086 \cdot x$ d.h. $5954{,}81 = 1{,}986086 \cdot x \iff x = 2998{,}26$

d.h. die beiden gleich hohen Rückzahlungen betragen 2998,26 €.

zu b)



Schulden Wertstellung am 31.05.2022

$$1000 \cdot 1{,}003 \cdot (1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}003) + 2000 + \frac{3000}{1{,}003^2 \cdot (1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}003)} = 5969{,}75$$

Rückzahlungen Wertstellung am 31.05.2022

$$x \cdot (1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}003) + \frac{x}{1{,}003^2 (1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}003)} = 1{,}00125 \cdot x + \frac{1}{1{,}010288}\cdot x =$$

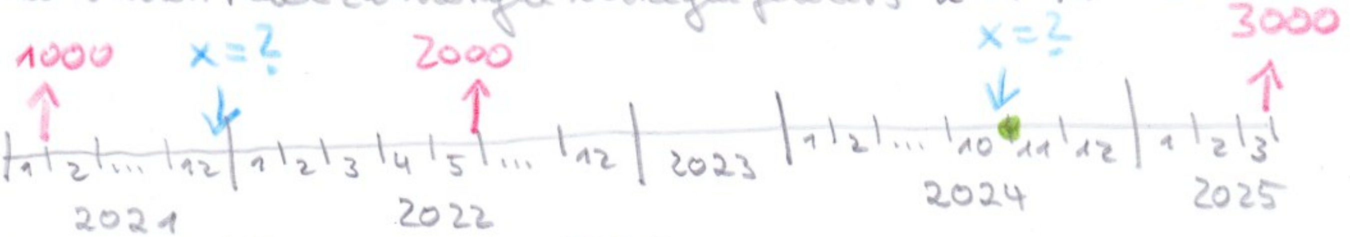
$1{,}991066 \cdot x$

Schulden = Rückzahlungen

$5969{,}75 = 1{,}991066 \cdot x \iff x = 2998{,}27$

d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2998,27 €.

zu c)



Schulden Wertstellung am 31.10.2024

$$1000 \cdot 1{,}003^3 \cdot (1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}003) + 2000 \cdot 1{,}003^2 \cdot (1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}003) + \frac{3000}{1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}003} =$$

$6022{,}09$

Rückzahlungen Wertstellung am 31.10.2024

$$x \cdot 1{,}003^2 \cdot (1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}003) + x = 1{,}008524 \cdot x + x = 2{,}008524 \cdot x$$

Schulden = Rückz.

$6022{,}09 = 2{,}008524 \cdot x \iff x = 2998{,}27$

d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2998,27 €.

In diesem Beispiel unterscheiden sich die Ergebnisse der drei Teilaufgaben kaum.

Allgemein gilt für das Endguthaben bei relativ gemischter Verz

$$K_{k+\gamma} = K_0 \cdot q^k \cdot (1+\gamma \cdot i) \qquad F.\,1.6$$

Gelten nur Kalenderjahre als volle Jahre, so wird diese Verz. als bankmäßig gemischte Verz bezeichnet.

3.3.2 Bankmäßig gemischte Verz.

Die Laufzeit n bei einer bankmäßig gemischten Verz. wird in drei Zeitperioden gegliedert:

- γ_1 = Jahresbruchteil vor Beginn der vollen Jahre
- k = Anzahl der vollen Kalenderjahre
- γ_2 = Jahresbruchteil nach Ende der vollen Jahre

Die beiden Jahresbruchteile γ_1 und γ_2 werden linear verzinst, die k vollen Jahre nachschüssig. Das Endguthaben beträgt:

$$K_{\gamma_1+k+\gamma_2} = K_0(1+\gamma_1 \cdot i) \cdot q^k \cdot (1+\gamma_2 \cdot i) \qquad F.\,1.7$$

Insb. bei der bankmäßig gemischten Verz. werden Beträge häufig auch taggenau berechnet.

Beispiel:

Am 09.11.2020 werden 10 000 € eingezahlt zu 0,8% Jahreszinsen. Wie hoch ist das Guthaben am 10.12.2025 bei bankmäßig gemischter Verz., wenn a) nicht taggenau und b) taggenau gerechnet werden soll?

zu a) $\gamma_1 = \frac{21}{360} + \frac{30}{360} = \frac{51}{360}$, $k=4$, $\gamma_2 = \frac{340}{360}$

$$K_n = 10\,000 \cdot \left(1+\frac{51}{360}\cdot 0{,}008\right) \cdot 1{,}008^4 \cdot \left(1+\frac{340}{360}\cdot 0{,}008\right) = 10\,413{,}65$$

zu b) Für den Tag der Einzahlung gibt es keine Zinsen. Und für den Tag der Auszahlung gibt es Zinsen.

$\gamma_1 = \frac{21}{366} + \frac{31}{366} = \frac{52}{366}$, $k=4$, $\gamma_2 = \frac{344}{365}$

$$K_n = 10000 \cdot \left(1+\frac{52}{366}\cdot 0{,}008\right) \cdot 1{,}008^4 \cdot \left(1+\frac{344}{365}\cdot 0{,}008\right) = 10\,413{,}52\ €$$