Mathematik-Klausur vom 01.10.2012
Finanzmathematik-Klausur vom 24.09.2012

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Rohmaterialien R_1, R_2, R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 hergestellt, anschließend werden aus den Zwischenprodukten die Endprodukte E_1, E_2, E_3 gefertigt. Der Direktbedarf (in ME) an Rohmaterial für jeweils eine ME der Zwischenprodukte und der Direktbedarf (in ME) an Zwischenprodukten für jeweils eine ME der Endprodukte ist wie folgt gegeben:

	Z_1	Z_2
R_1	3	2
R_2	4	5
R_3	1	6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	7
Z_2	3	4	5

Im Lager befindet sich ein Vorrat von 1 390 ME von R_1, 2 530 ME von R_2, 2 010 ME von R_3.

Um zu ermitteln, wie viele ME der Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, gehen Sie bitte wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Gesamtbedarfsmatrix.

b) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

c) Bestimmen Sie alle ganzzahligen nicht negativen Lösungen.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen produziert ein Gut für 10 Euro pro ME. Zusätzlich fallen Fixkosten in Höhe von 10 000 Euro an. Die Preis-Absatz Funktion zu diesem Gut sei

$$p(x) = 410 - 0{,}1x.$$

Dabei sind x die prodzuzierte und abgesetzte Menge und p der Preis des Gutes.

a) Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich (=Menge aller möglichen Funktionswerte) für die Preis-Absatz Funktion an.

b) Stellen Sie die Kosten-, Umsatz- (Erlös-) und Gewinnfunktion auf.

c) Für welche produzierte und abgesetzte Menge ist der Gewinn global (absolut) maximal?

d) Wie verändert sich - ausgehend von $x = 2\,000$ ME - der Preis ungefähr, wenn die produzierte und abgesetzte Menge um ein Prozent steigt?

e) Wie ändert sich das Ergebnis aus Teil c), wenn die Fixkosten um einhundert Prozent steigen? (Begründen Sie kurz Ihre Antwort.)

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - a \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3.$$

Dabei seien sowohl x_1, x_2, x_3 als auch der Parameter a reelle Zahlen.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion.

b) Zeigen Sie, dass die notwendige Bedingung zur Bestimmung eines Extremwertes für $a \neq \frac{1}{3}$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 4
Bei relativ gemischter Verzinsung zu 4% pro Jahr besteht die folgende Zahlungsverpflichtung:

- 1 000 Euro am 31.03.2014
- 2 000 Euro am 31.08.2015
- 3 000 Euro am 31.12.2018

Die Schulden sollen zurückgezahlt werden durch

a) eine einmalige Zahlung am 31.07.2013. Wie hoch ist die einmalige Rückzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

b) zwei gleich hohe Beträge am 31.03.2014 und am 31.12.2018. Wie hoch sind die beiden Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

c) eine Zahlung über 2 500 Euro am 31.05.2017 und eine Restzahlung am 31.12.2018. Wie hoch ist die Restzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2013 ist?

Aufgabe 5

a) Sie überlegen, eine (nicht unbedingt betriebsnotwendige) Investition durchzuführen und rechnen die Investition mit einer Laufzeit von zehn Jahren und einem Jahreszins von 6%, da Sie einen Zins von 6% (p.a.) bekommen würden, wenn Sie statt der Investition das Geld „auf der Bank“ anlegen würden. Die Investitionsrechnung ergibt einen positiven Kapitalwert. Die Berechnung des internen Zinsfußes ergibt: 6,09%. Wie beurteilen Sie diese Investition?

b) Wenn eine Investitionsrechnung als Ergebnis einen Kapitalwert von null (also $K_0 = 0$) ergibt, bedeutet das <u>immer</u>, dass die Investition unvorteilhaft ist? (Begründung!)

c) Wenn Sie später im Beruf von der Geschäftsführung die Aufgabe bekommen, für diese als Entscheidungsgrundlage eine Investitionsrechnung durchzuführen, sollte Ihnen klar sein, dass die eigentliche (mathematische) Investitionsrechnung nur der kleinere Teil Ihrer Arbeit sein wird.

   Was wird den größten Teil Ihrer Arbeit ausmachen?

Aufgabe 6
Der Amerikaner Jarry Lee kaufte 1969 (gilt als erstes Jahr) den Aston Martin DB 5 aus dem alten James-Bond-Film „Goldfinger“ für umgerechnet 40 000 €. In 2010 (gilt als letztes Jahr) verkaufte er das Auto für 3 Mio €.

a) Wie hoch ist die jährliche Rendite (interner Zins)?

b) Dieser Wagen wird jetzt Ihnen zum Kauf angeboten. Wie viel Geld dürfen Sie maximal für den Ankauf einsetzen, wenn Sie das Auto nach zwei Jahren für 3,6 Mio € wieder verkaufen würden und eine jährliche Rendite von mindestens 15% erzielen wollen?

Aufgabe 7
Für einen Hauskauf wird bei 3,8% Jahreszinsen ein Kredit in Höhe von 246 000 Euro aufgenommen.

a) Als Rückzahlung des Kredits werden vorschüssige Monatsraten in Höhe von 1 500 Euro vereinbart sowie eine Restzahlung einen Monat nach der letzten vollen Monatsrate. Die erste Monatsrate ist fällig bei Kreditaufnahme.

   1. Wie viele Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen?
   2. Wie hoch ist die Restzahlung einen Monat nach der letzten vollen Monatsrate?

b) Als Rückzahlung des Kredits wird eine Annuitätentilgung über zwanzig Jahre vereinbart, erste Annuität fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme.

   1. Wie hoch sind die Annuitäten?

2. Geben Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuität, Restschuld jeweils am Ende des Jahres) für das siebte Tilgungsjahr an.

Aufgabe 8

Ein Brauereiunternehmen überlegt die Anschaffung einer neuen, extrem energieeffizienten Abfüllanlage als Ersatz für eine bestehende Anlage. Für diese **neue** Anlage gilt:

Anschaffungsauszahlung (Anschaffungskosten):	450 000 €
Nutzungsdauer:	5 Jahre
Liquidationserlös am Ende der Nutzungsdauer:	40 000 €
Fixe Betriebskosten der Anlage pro Jahr:	50 000 €
Variable Betriebskosten je Flasche:	0,02 €

Nach drei Jahren wäre eine Überholung der neuen Anlage nötig, die eine Ausgabe von 30 000 € bedeuten würde.

Die **bestehende** Anlage ist verbunden mit:

Fixe Betriebskosten pro Jahr:	100 000 €
Variable Kosten pro Flasche:	0,10 €

Jährlich werden 800 000 Flaschen abgefüllt. Der Kalkulationszinsfuß beträgt 5% p.a. Lohnt sich die neue Anlage? (Begründung!)

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $M = A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 31 \\ 23 & 24 & 53 \\ 20 & 25 & 37 \end{bmatrix}$

b) e_i=ME von E_i für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 12e_1 + 11e_2 + 31e_3 & = & 1\,390 \\ \text{II} & 23e_1 + 24e_2 + 53e_3 & = & 2\,530 \\ \text{III} & 20e_1 + 25e_2 + 37e_3 & = & 2\,010 \end{array}$$

Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3	r	Operation
1	$\boxed{12}$	11	31	1 390	
2	23	24	53	2 530	
3	20	25	37	2 010	
4	12	11	31	1 390	1
5	0	35	−77	−1 610	12 · 2 − 23 · 1
6	0	$\boxed{20}$	−44	−920	3 · 3 − 5 · 1
7	12	11	31	1 390	4
8	0	20	−44	−920	6
9	0	0	0	0	4 · 5 − 7 · 6

⑨ $20e_2 - 44e_3 = -920 \;\Leftrightarrow e_2 = -46 + 2{,}2e_3$
⑧ $12e_1 + 11(-46 + 2{,}2e_3) + 31e_3 = 1\,390 \Leftrightarrow e_1 = 158 - 4{,}6e_3$

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 158 - 4{,}6e_3 \\ 2{,}2e_3 - 46 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in \mathbb{R}\}$$

c) Nicht negative Lösungen:
$e_1 = 158 - 4{,}6e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 158 \geq 4{,}6e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq 34{,}3478$
$e_2 = 2{,}2e_3 - 46 \geq 0 \Leftrightarrow 2{,}2e_3 \geq 46 \Leftrightarrow e_3 \geq 20{,}9091$
$e_3 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 158 - 4{,}6e_3 \\ 2{,}2e_3 - 46 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in [20{,}9091\,;\,34{,}3478]\}$$

Ganzzahlige nicht negative Lösungen:
$e_3 = 25 \Rightarrow e_1 = 43$ und $e_2 = 9$
$e_3 = 30 \Rightarrow e_1 = 20$ und $e_2 = 20$

Lösung zu Aufgabe 2:

a)

x	p
0	410
4 100	0

; d.h. Definitionsbereich = [0;4 100] und Wertebereich = [0;410]

b) $K(x) = 10x + 10\,000$
$U(x) = 410x - 0{,}1x^2$
$G(x) = -0{,}1x^2 + 400x - 10\,000$

c) $G'(x) = -0{,}2x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,000$
$G''(x) = -0{,}2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 2\,000$ glob. Max.
$G(2\,000) = 390\,000$ GE

d) *1. Lösungsweg:*
$p'(x) = -0{,}1$
$$\varepsilon_p(2\,000) = p'(2000) \cdot \frac{2\,000}{p(2\,000)} = -0{,}1 \cdot \frac{2\,000}{210} = -0{,}9524$$
d.h. wird die produzierte und abgesetzte Menge von 2 000 ME um ein Prozent erhöht, so muss der Preis um 0,96 Prozent gesenkt werden.
2. Lösungsweg:

x	2 000	2 020
p	210	208

$\frac{208}{210} = 0{,}9904$
Rate=Faktor $-1 = 0{,}9904 - 1 = -0{,}0096$

d.h. wird die produzierte und abgesetzte Menge von 2 000 ME um ein Prozent erhöht, so muss der Preis um 0,96 Prozent gesenkt werden.

e) $K_f(x) = 20\,000$
Die Stelle des globalen Maximums in $x = 2\,000$ ändert sich nicht, weil die Ableitung einer additiven Konstante null beträgt. Hingegen ändert sich der maximale Gewinn wie folgt: $G(2\,000) = 380\,000$ Euro.

Lösung zu Aufgabe 3:

a)
$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &= -2x_1 - x_2 \\
f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -2x_2 - x_1 + x_3 \\
f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -2ax_3 + x_2 \\
f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3) &= -2 & f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -1 \\
f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -2 & f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 0 \\
f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -2a & f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 1
\end{aligned}$$

b) Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 &=& -2x_1 - x_2 \\
\text{II} & 0 &=& -2x_2 - x_1 + x_3 \\
\text{III} & 0 &=& -2ax_3 + x_2
\end{array}$$
Gaußalgorithmus

Zeile	x_1	x_2	x_3	r	Operation
1	$\boxed{-2}$	-1	0	0	
2	-1	-2	1	0	
3	0	1	$-2a$	0	
4	-2	-1	0	0	1
5	0	$\boxed{-3}$	2	0	$2 \cdot$ 2 $-$ 1
6	0	1	$-2a$	0	3
7	-2	-1	0	0	4
8	0	-3	2	0	6
9	0	0	$-6a+2$	0	$3 \cdot$ 6 $+$ 5

6 $(-6a+2) \cdot x_3 = 0 \;\Leftrightarrow x_3 = 0$ oder $-6a + 2 = 0$
1. Fall: $-6a + 2 = 0 \Leftrightarrow x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig; d.h. $\mathbb{L}$ ist mehrdeutig
2. Fall: $-6a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$; d.h. $\mathbb{L}$ ist eindeutig.
Und wenn $-6a + 2 \neq 0$ gilt, ist $-6a \neq -2$ und $a \neq \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $$K_0 = \frac{1\,000}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \frac{2\,000}{1{,}04^2 \cdot (1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}04)} + \frac{3\,000}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} = 5\,242{,}35$$
d.h. die einmalige Rückzahlung beträgt 5 242,35 Euro.

b) $5\,242{,}35 = \dfrac{x}{1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}04} + \dfrac{x}{1{,}04^5\cdot(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}04)} \Rightarrow 5\,242{,}35 = 1{,}782479x \Rightarrow x = 2\,941{,}05$

d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2 941,05 Euro.

c)
$$\begin{aligned} 5\,242{,}35 &= \frac{2\,500}{1{,}04^3\cdot(1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}04)} + \frac{x}{1{,}04^5\cdot(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}04)} \\ 5\,242{,}35 &= = 2\,150{,}80 + 0{,}8084529x \\ 3\,091{,}55 &= 0{,}8084529x \\ x &= 3\,824{,}03 \end{aligned}$$

d.h. die Restzahlung beträgt 3 824,03 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Rein rechnerisch betrachtet lohnt die Investition, weil K_0 positiv ist und somit der interne Zins über dem Kalkulationszins liegt. Ist der Bankzins von 6% als sicher anzusehen, so erscheint betriebswirtschaftlich betrachtet eine erwartete (also nicht sichere) Rendite von 6,09% als „geringfügig“ höher als der sichere Bankzins, als Konsequenz könnte das Riskio der Investition unterlassen werden.

b) Nein, $K_0 = 0$ bedeutet nicht immer, dass die Investition unrentabel ist. Hier wären für eine Investitionsentscheidung andere Argumente wie z.B. Erhalt der Arbeitsplätze, Erhalt des firmeninternen Fachwissens, Image des Unternehmens heranzuziehen.

c) Die eigentliche Arbeit ist das Schätzen der Höhe der jährlichen Periodenüberschüsse.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $0 = \dfrac{3\,000\,000}{q^{42}} - 40\,000 \Leftrightarrow q = \sqrt[42]{\dfrac{3\,000\,000}{40\,000}} = 1{,}108267$

d.h. der interne Zins beträgt etwa 10,83%.

b) $3\,600\,000 = K_0\cdot 1{,}15^2 \Leftrightarrow K_0 = \dfrac{3\,600\,000}{1{,}15^2} = 2\,722\,117$

d.h. der Verkaufspreis darf höchstens 2 722 117 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 7:

a)
1. $r_J = 1\,500(12 + 6{,}5\cdot 0{,}038) = 18\,370{,}50$

   $n = -\dfrac{\ln[1-\frac{246\,000}{18\,370{,}50}\cdot 0{,}038]}{\ln 1{,}038} = 19{,}06448$

   d.h. neunzehn Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen.
2. $K_{19} = 246\,000\cdot 1{,}038^{19} - 18\,370{,}5\cdot\dfrac{1{,}038^{19}-1}{0{,}038} = 1\,161{,}14$

   d.h. die Restzahlung beträgt 1 161,14 Euro.

b) 1. $A = 246\,000 \cdot 1{,}038^{20} \cdot \dfrac{0{,}038}{1{,}038^{20}-1} = 17\,782{,}00$
d.h. die Annuitäten betragen 17 782,00 Euro.

2. $K_6 = 246\,000 \cdot 1{,}038^{6} - 17\,782{,}00 \cdot \dfrac{1{,}038^{6}-1}{0{,}038} = 190\,338$
$Z_7 = K_6 \cdot 0{,}038 = 7\,232{,}84$
$T_7 = A - Z_7 = 10\,549{,}16$
$K_7 = K_6 - T_7 = 179\,788{,}84$

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuität a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
7	7 232,84	10 549,16	17 782,00	179 788,84

Lösung zu Aufgabe 8:
1. Lösungsweg:
Barwert der Ausgaben für die bestehende Anlage:

$$K_0 = \frac{180\,000}{1{,}05} + \frac{180\,000}{1{,}05^2} + \frac{180\,000}{1{,}05^3} + \frac{180\,000}{1{,}05^4} + \frac{180\,000}{1{,}05^5} = 180\,000 \cdot \frac{1{,}05^5-1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 779\,305{,}8$$

Barwert der Ausgaben für die neue Anlage:

$$K_0 = \frac{66\,000}{1{,}05} + \frac{66\,000}{1{,}05^2} + \frac{66\,000+30\,000}{1{,}05^3} + \frac{66\,000}{1{,}05^4} + \frac{66\,000-40\,000}{1{,}05^5} + 450\,000 = 730\,319{,}5$$

d.h. der Barwert der Ausgaben für die bestehende Anlage ist um $779\,305{,}8 - 730\,319{,}5 = 48\,986{,}3$ Euro höher, somit lohnt sich der Austausch der alten Anlage.

2. Lösungsweg:
Endwert der Ausgaben für die bestehende Anlage: 994 613,6 Euro
Endwert der Ausgaben für die neue Anlage: 932 093,4 Euro
d.h. der Endwert der Ausgaben für die bestehende Anlage ist höher, somit lohnt sich der Austausch der alten Anlage.

3. Lösungsweg:

Jahr	Kosten (fixe plus variable) alte Anlage	neue Anlage	Differenz (Periodenüberschuss)
1	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
2	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
3	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
4	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000
5	100 000+80 000	50 000+16 000	+114 000

$$K_0 = \frac{114\,000}{1{,}05} + \frac{114\,000}{1{,}05^2} + \frac{114\,000-30\,000}{1{,}05^3} + \frac{114\,000}{1{,}05^4} + \frac{114\,000+40\,000}{1{,}05^5} - 450\,000 = 48\,986{,}26 > 0$$

d.h. die Ersparnis würde 48 986,26 Euro betragen; d.h. der Kauf der neuen Anlage lohnt sich.