Mathematik-Klausur vom 2. Februar 2006

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 3,4	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Gegeben sind drei Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie:

$$2A \cdot B - A \cdot C$$

b) Gegeben ist die Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 500 - 4p \ \ ; p \in [0; 125]$$

Bestimmen und interpretieren Sie die Elastizität von $x(p)$ an den Stellen:

- $p = 10$
- $p = 100$

c) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x,y) = xy^4 + \ln(x^2+1) + \frac{x}{y} \ \ ; x, y > 0$$

Aufgabe 2

In einem Unternehmen werden in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und anschließend die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Dazu werden folgende Mengeneinheiten benötigt:

Direktbedarf (in ME)
an Rohstoffen
für je eine Mengeneinheit
der Zwischenprodukte
(Produktionsmatrix 1. Stufe)

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	0	4
R_2	0	3	0
R_3	1	0	1

Direktbedarf (in ME)
an Zwischenprodukten
für je eine Mengeneinheit
der Endprodukte
(Produktionsmatrix 2. Stufe)

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	1
Z_2	2	0	1
Z_3	0	1	2

Eine Mengeneinheit von R_1 kostet eine Geldeinheit, eine Mengeneinheit von R_2 kostet zwei Geldeinheiten und eine Mengeneinheit von R_3 kostet drei Geldeinheiten.

a) Berechnen Sie den Gesamtbedarf (Produktionsmatrix insgesamt) an Rohstoffen R_1, R_2, R_3, der für die Herstellung jeweils einer Mengeneinheit der Endprodukte E_1, E_2, E_3 benötigt wird.

b) Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 werden benötigt, um zehn Mengeneinheiten von E_1, zwanzig Mengeneinheiten von E_2 und dreißig Mengeneinheiten von E_3 herzustellen?

c) In einer Periode befinden sich noch 300 Mengeneinheiten von R_1, 900 Mengeneinheiten von R_2 und 150 Mengeneinheiten von R_3 im Lager. Wie viele Mengeneinheiten der Endprodukte E_1, E_2, E_3 lassen sich aus dem Vorrat herstellen, wenn der Vorrat vollständig aufgebraucht werden soll?

d) Dem Unternehmen werden die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 zu einem Preis von jeweils vier Geldeinheiten pro Mengeneinheit angeboten. Ist es für das Unternehmen kostengünstiger, die Zwischenprodukte zu kaufen oder weiterhin selbst zu produzieren? (Begründung!)

Aufgabe 3

Ein Kunde mit geringem Eigenkapital nimmt einen Kredit in Höhe von 200 000 € zu 5,1 % Jahreszins auf. Der Kreditvertrag sieht vor, dass bis zur einmaligen Kredit-Rückzahlung der Kunde lediglich die Kreditzinsen zahlt. Für die einmalige Kredit-Rückzahlung verpflichtet die Bank den Kunden, eine Kapital-Lebensversicherung zu 4,9 % Zinsen p.a. abzuschließen. Die einmalige Kredit-Rückzahlung soll nach zwanzig Jahren durch die dann fällige Kapital-Lebensversicherung erfolgen. Sowohl die Zahlung der Kreditzinsen als auch die Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung erfolgen monatlich nachschüssig.

a) Wie hoch sind die monatlichen Zahlungen der Kreditzinsen?

b) Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung?

c) Wie hoch ist die monatliche Belastung des Kunden?

Aufgabe 4

Ein Kleinunternehmer hat am 31.03.2003 einen Kredit über 24 000 € bei relativer gemischter Verzinsung zu 5,6 % p.a. aufgenommen. Der Vertrag über die Tilgungsmodalitäten sieht wie folgt aus:

- 2003 und 2004 zahlt er gar nichts
- 2005 und 2006 begleicht er mit vorschüssigen Monatsraten nur die anfallenden Jahreszinsen
- ab 01.01.2007 zahlt er dann monatlich vorschüssig 300 € bis zur endgültigen Tilgung der Schuld

a) Wie hoch ist die Schuld am 31.12.2004?

b) Wie hoch sind die Zahlungen zu Beginn eines jeden Monats der Jahre 2005 und 2006?

c) Wie oft sind ab 01.01.2007 volle vorschüssige Monatsraten zu zahlen?

d) Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2015?

Aufgabe 5

Gesucht wird das globale/absolute Minimum der folgenden Funktion mit einer Nebenbedingung:

$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 \ ; x, y > 0$

unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = 625$

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ an.

b) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion.

c) Überprüfen Sie, ob die ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion an der Stelle $(x = 15; y = 20; \lambda = -0{,}8)$ jeweils den Wert null haben. (Notwendige Bedingung)

d) Überprüfen Sie für die Stelle $(x = 15; y = 20; \lambda = -0{,}8)$ die hinreichende Bedingung. Liegt dort ein globales/absolutes Minimum der Funktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingung vor?

Aufgabe 6

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$Z = 4x_1 + 8x_2 \stackrel{!}{=} \text{maximal}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{unter} & \text{I} & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & \text{II} & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & \text{III} & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung.

b) 1. Handelt es sich um ein mehrdeutiges Optimierungsproblem? (Begründung!)
   2. Bestimmen Sie ggf. eine weitere optimale Lösung.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) $2AB - AC = A(2B - C) = A \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \right) =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $x'(p) = -4$

$\epsilon_x(p) = -4 \cdot \dfrac{p}{x(p)}$

$\epsilon_x(10) = -4 \cdot \dfrac{10}{460} = -0{,}08695652$

d.h. wird der Preis von 10 GE um 1 % gesteigert, so sinkt der Absatz um 0,087 %.

$\epsilon_x(100) = -4 \cdot \dfrac{100}{100} = -4$

d.h. wird der Preis von 100 GE um 1 % gesteigert, so sinkt der Absatz um 4 %.

c) $f_x(x,y) = y^4 + \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{y}$

$f_y(x,y) = 4xy^3 - \dfrac{x}{y^2}$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gesamtbedarf M:

$$M = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $M \cdot e = r$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 150 \\ 140 \end{bmatrix}$$

d.h. für das Produktionsprogramm werden 440 ME von R_1, 150 ME von R_2 und 140 ME von R_3 benötigt.

c) e_i=ME von $E_i; i = 1,2,3$

Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	2	6	10	300	
2	6	0	3	900	
3	$\boxed{1}$	2	3	150	
4	1	2	3	150	3
5	0	$\boxed{2}$	4	0	1$-2 \cdot$ 3
6	0	-12	-15	0	2$-6 \cdot$ 3
7	1	2	3	150	4
8	0	2	4	0	5
9	0	0	9	0	6$+6 \cdot$ 5

9 $\quad 9e_3 = 0 \Rightarrow e_3 = 0$

8 $\quad 2e_2 + 0 = 0 \Rightarrow e_2 = 0$

7 $\quad e_1 + 0 + 0 = 150 \Rightarrow e_1 = 150$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

d.h. aus dem Vorrat lassen sich lediglich 150 ME von E_1 herstellen.

d) *1. Lösungsweg:*
Rohstoffkosten der Zwischenprodukte bei eigener Herstellung:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	$2 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$4 \cdot 1$
R_2	$0 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	$0 \cdot 2$
R_3	$1 \cdot 3$	$0 \cdot 3$	$1 \cdot 3$
	$\sum = 5$	$\sum = 6$	$\sum = 7$

d.h. werden die Zwischenprodukte in eigener Produktion hergestellt, so betragen allein die Rohstoffkosten 5 GE für eine ME von Z_1, 6 GE für eine ME von Z_2 und 7 GE für eine ME von Z_3. Deshalb ist es kostengünstiger, die Zwischenprodukte zu kaufen.
2. Lösungsweg:

$$[1;2;3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [5;6;7]$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Jährliche Kreditzinsen:
$200\,000 \cdot 0{,}051 = 10\,200$
monatliche Kreditzinsen:
$10\,200 = r(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}051) \Rightarrow r = 830{,}59$
d.h. der Kunde zahlt monatlich 830,59 € an Kreditzinsen.

b) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$200\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}049^{20} - 1}{0{,}049} \Rightarrow r_J = 6\,112{,}7235$
monatliche nachschüssige Einzahlungen r_M:
$6\,112{,}7235 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}049) \Rightarrow r_M = 498{,}21$
d.h. die monatlichen Einzahlungen in die Kapital-Lebensversicherung betragen 498,21 €.

c) $830{,}59 + 498{,}21 = 1\,328{,}80$
d.h. die monatlichen Belastungen des Kunden betragen 1 328,80 €.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $24\,000 \cdot (1 + \dfrac{3}{4} \cdot 0{,}056) \cdot 1{,}056 = 26\,408{,}45$
d.h. die Schulden am 31.12.2004 betragen 26 408,45 €.

b) Jahreszins $= 26\,408{,}45 \cdot 0{,}056 = 1\,478{,}87$
monatliche vorschüssige Zahlungen:
$1\,478{,}87 = r(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}056) \Rightarrow r = 119{,}61$
d.h. in den Jahren 2005 und 2006 zahlt er monatlich 119,61 €.

c) Die Schulden am 01.01.2007 betragen 26 408,45 €
jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 300 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}056) = 3\,709{,}20$
Laufzeit (in Jahren):
$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{26\,408{,}45}{3\,709{,}2} \cdot 0{,}056]}{\ln 1{,}056} = 9{,}335 \text{ Jahre}$$
Laufzeit in Monaten:
$0{,}335 \cdot 12 = 4{,}02$ d.h. volle Rückzahlungen sind 9 Jahre und 4 Monate zu leisten.
d.h. es sind 112 volle Monatsraten zu zahlen.
(d.h. letzte volle Rückzahlung erfolgt Anfang April 2016.)

d) $K_9 = 26\,408{,}45 \cdot 1{,}056^9 - 3\,709{,}20 \cdot \dfrac{1{,}056^9 - 1}{0{,}056} = 1\,199{,}43$
d.h. die Restschuld am 31.12.2015 beträgt 1 199,43 €

Lösung zu Aufgabe 5

a) $L(x, y, \lambda) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 625) \ ; x, y > 0$

b)
$$\begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) &= 2(x - 3) + 2\lambda x \\ L_y(x, y, \lambda) &= 2(y - 4) + 2\lambda y \\ L_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 625 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} L_x(x = 15; y = 20; \lambda = -0{,}8) &= 2(15 - 3) - 2 \cdot \tfrac{4}{5} \cdot 15 = 0 \\ L_y(x = 15; y = 20; \lambda = -0{,}8) &= 2(20 - 4) - 2 \cdot \tfrac{4}{5} \cdot 20 = 0 \\ L_\lambda(x = 15; y = 20; \lambda = -0{,}8) &= 15^2 + 20^2 - 625 = 0 \end{aligned}$$
Wenn Sie die Nullstelle selber berechnen möchten, so gehen Sie wie folgt vor:

I	$0 = 2x - 6 + 2\lambda x$
III	$0 = 2y - 8 + 2\lambda y$
III	$0 = x^2 + y^2 - 625$
$y \cdot \mathrm{I}$	$0 = 2xy - 6y + 2\lambda xy$
$x \cdot \mathrm{II}$	$0 = 2xy - 8x + 2\lambda xy$
$y \cdot \mathrm{I} - x \cdot \mathrm{II}$	$0 = -6y + 8x \Rightarrow x = 0{,}75y$

III $0 = (0{,}75y)^2 + y^2 - 625 = 1{,}5625y^2 - 625 \Rightarrow y^2 = 400 \Rightarrow y = \pm 20$
Da $y > 0$, muss gelten: $y = 20 \Rightarrow x = 0{,}75 \cdot 20 = 15$
I $0 = 30 - 6 + 30\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{24}{30} = -0{,}8$

d) $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda$
$L_{yy}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda$
$L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
Hinreichende Bedingung:
$$\begin{aligned} D(x; y; -0{,}8) &= L_{xx}(x; y; -0{,}8) \cdot L_{yy}(x; y; -0{,}8) - [L_{xy}(x; y; -0{,}8)]^2 \\ &= (2 - \tfrac{8}{5})(2 - \tfrac{8}{5}) - 0 \\ &>_{\text{immer}} 0 \end{aligned}$$
$L_{xx}(x; y; -0{,}8) = 2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5} >_{\text{immer}} 0$
d.h. $f(x, y)$ hat in $(x, y) = (15; 20)$ ein globales Minimum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 6

a)

1.	x_1	x_2	
e_1	1	2	4
e_2	2	1	4
e_3	0	$\boxed{2}$	3
	-4	-8	0

2.	x_1	e_3	
e_1	$\boxed{1}$	-1	1
e_2	2	$-1/2$	$5/2$
x_2	0	$1/2$	$3/2$
	-4	4	12

3.	e_1	e_3	
x_1	1	-1	1
e_2	-2	$\boxed{3/2}$	$1/2$
x_2	0	$1/2$	$3/2$
	4	0	16

Die optimale Lösung ist: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ \hline 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Zielfunktionswert $Z = 16$.

b)

1. Ja, in der Zielfunktionszeile im Endtableau steht eine Null.
2.

4.	e_1	e_2	
x_1	$-1/3$	$2/3$	$4/3$
e_2	$-4/3$	$2/3$	$1/3$
x_2	$2/3$	$-1/3$	$4/3$
	4	0	16

Die weitere optimale Lösung ist: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ \hline 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$