Mathematik-Klausur vom 4.2.2004

Aufgabe 1
Ein Klein-Sparer verfügt über 2 000 €, die er möglichst hoch verzinst anlegen möchte.

a) Eine Anlage-Alternative besteht im Kauf von Bundesschatzbriefen vom Typ B mit einer Laufzeit von 7 Jahren, jährlich steigenden Zinsen und Zuschlag der Zinsen und Zinseszinsen am Ende des Jahres. Die jährliche Verzinsung der Bundesschatzbriefe verläuft wie folgt: 1. Jahr 3,25%, 2. Jahr 4,25%, 3. Jahr 4,75%, 4. Jahr 5,2%, 5. Jahr 5,75%, 6. Jahr 6,25% und 7. Jahr 6,5%.

   1. Welchen Betrag kann sich der Klein-Sparer nach 7 Jahren auszahlen lassen?
   2. Mit welchem einheitlichen Zinssatz müsste das Anfangskapital von 2 000 € verzinst werden, damit der Sparer nach 7 Jahren über dasselbe Endkapital wie unter Teilaufgabe 1. verfügen könnte?

b) Als Alternative könnte der Klein-Sparer das Kapital von 2 000 € auch in 90-Tage-Festgelder mit einer Laufzeit von 5 Jahren bei seiner Hausbank anlegen, die ihm derzeit eine nominelle jährliche Verzinsung von 5,5% anbietet. Nach jeweils 90 Tagen (vierteljährliche Verzinsung zum relativen Zins) werden die Zinsen dem Konto gutgeschrieben.

   1. Über welchen Betrag könnte der Klein-Sparer nach 5 Jahren verfügen?
   2. Wie hoch ist der Effektivzins?

c) Für welche Anlage-Alternative (Bundesschatzbrief oder 90-Tage-Festgeld) wird der Sparer sich entscheiden, wenn als einziges Kriterium die Höhe der Effektivverzinsung herangezogen wird? (Hinweis: Die Effektivverzinsung der Bundesschatzbriefe bezieht sich auf die gesamte Laufzeit von 7 Jahren.)

Aufgabe 2
Eine Familie hat ein Haus für 300 000 € gekauft. Sie hat für die Finanzierung am 1.1.2000 einen Kredit über 200 000 € bei 4,2% Zinsen p.a. aufgenommen.

a) Die Familie bezahlt den Kredit binnen 20 Jahren mittels Annuitätentilgung zurück. Die erste Annuität ist fällig am 31.12.2000.

   1. Wie hoch sind die Annuitäten?
   2. Unerwartet wird am 1.1.2010 ein zusätzlicher Rückzahlungsbetrag über 30 000 € eingezahlt. Auf welchen Wert reduzieren sich auf Grund der Rückzahlung anschließend die Annuitäten?

b) Die Familie bezahlt den Kredit jeweils zum Ende eines Quartals mit Beträgen in Höhe von 3 000 € zurück. Der erste Betrag ist fällig am 31.3.2000. In welchem Kalenderjahr ist die letzte volle Quartalsrate fällig?

Aufgabe 3
Ein Unternehmen arbeitet mit folgender Preis-Absatz Funktion:

$p(x) = x^2 - 28x + 196; \;\; x \in [0; 9]$

(x = abgesetzte und produzierte Menge, p = Preis in € pro Mengeneinheit)

Die Gesamtkosten ergeben sich durch:

$K(x) = 2x^2 + 12x + 56; \;\; x \in [0; 9]$

a) Zeigen Sie, dass die Preis-Absatz Funktion monoton fallend ist.

b) Berechnen Sie die Gewinnfunktion.

c) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. (Die Lösung ist auf zwei Stellen hinter dem Komma zu runden.)

d) Bestimmen Sie das Betriebsoptimum, d.h. die Produktionsmenge mit minimalen durchschnittlichen Gesamtkosten (d.h. die Produktionsmenge mit minimalen Stückkosten).
(Die Lösung ist auf zwei Stellen hinter dem Komma zu runden.)

Aufgabe 4
Ein Betrieb produziert zwei Produkte, die drei Fertigungsstufen (Teilefertigung, Vormontage und Endmontage) durchlaufen.

In den drei Fertigungsstufen stehen folgende Kapazitäten (in Stunden) für einen betrachteten Fertigungszeitraum zur Verfügung:

Teilefertigung	80 Std.
Vormontage	100 Std.
Endmontage	75 Std.

Diese drei Fertigungsstufen werden durch die zwei Produkte wie folgt belastet:

	Produkt 1	Produkt 2
Teilefertigung	4 Std./Stück	2 Std./Stück
Vormontage	2 Std./Stück	3 Std./Stück
Endmontage	3 Std./Stück	1 Std./Stück

Der Gewinn beträgt 12 €/Stück für Produkt 1 und 8 €/Stück für Produkt 2.
Wie viele Mengeneinheiten sollten jeweils von beiden Produkten hergestellt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf.

b) Lösen Sie das Lineare Optimierungsmodell mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

c) Zusätzlich ist sicherzustellen, dass von den beiden Produkten zusammen mindestens 30 Stück zu fertigen sind. Aus technischen Gründen sei ferner das Verhältnis

der Produktionsmengen x_1 von Produkt 1 und x_2 von Produkt 2 durch folgende Gleichung festgelegt: $3x_1 + x_2 = 45$.
Erweitern Sie das mathematische Modell unter a) und bestimmen Sie mit dem Simplex-Algorithmus ausgehend von dem Ausgangstableau ein weiteres Tableau.

d) Warum ist ohne weitere Berechnung von c) unmittelbar die optimale Lösung von c) anzugeben?

Aufgabe 5

Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ zwei Matrizen.

a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

b) Berechnen Sie die Inverse B^{-1}.

c) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$.

d) Berechnen Sie die Inverse $(AB)^{-1}$.

Lösungen

Lösung von Aufgabe 1:

a) 1. $$\begin{aligned} K_7 &= 2\,000 \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}0425 \cdot 1{,}0475 \cdot 1{,}052 \cdot 1{,}0575 \cdot 1{,}0625 \cdot 1{,}065 \\ &= 2\,000 \cdot 1{,}419\,367 \\ &= 2\,838{,}74 \end{aligned}$$
d.h. das Guthaben beträgt 2 838,74 €.

2. $$\sqrt[7]{\frac{2\,838{,}74}{2\,000}} = 1{,}0513$$
d.h. der Zins beträgt 5,13% p.a. (Effektiv-Zins)
oder
$\sqrt[7]{1{,}419\,376} = 1{,}0513$

b) 1. $$K_5 = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}055}{4}\right)^{4\cdot 5} = 2\,000 \cdot 1{,}01375^{20} = 2\,628{,}13$$
d.h. das Guthaben beträgt 2 628,13 €.

2. $1{,}01375^4 = 1{,}0561$
d.h. der Zins beträgt 5,61% p.a.

c) Bundesschatzbrief: 5,13% p.a.
90-Tage-Festgeld: 5,61% p.a. $\leftarrow$ höher
d.h. der Sparer wird sich für das 90-Tage-Festgeld entscheiden.

Lösung von Aufgabe 2:

a) $$A = 200\,000 \cdot 1{,}042^{20} \cdot \frac{0{,}042}{1{,}042^{20} - 1} = 14\,978{,}15$$

1. d.h. die Annuitäten betragen 14 978,15 €.
2. $K_{10} = 200\,000 \cdot 1.042^{10} - 14\,978{,}15 \cdot \frac{1{,}042^{10}-1}{0{,}042} = 120\,285{,}60$
   $120\,285{,}60 - 30\,000 = 90\,285{,}60$
   $$A = 90\,285{,}60 \cdot 1{,}042^{10} \cdot \frac{0{,}042}{1{,}042^{10} - 1} = 11\,242{,}50$$
   d.h. die restlichen zehn Annuitäten betragen 11 242,50 €.

b) $r_j = 3\,000 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,189$
$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{12\,189} \cdot 0{,}042\right]}{\ln 1{,}042} = 28{,}4$$

1.1.2000 bis 31.12.2009	=	10 Jahre
1.1.2010 bis 31.12.2019	=	10 Jahre
1.1.2020 bis 31.12.2027	=	8 Jahre (Restschuld 4 737,07)

d.h. im Jahr 2028 ist die letzte volle Quartalsrate über 3 000 € fällig.

Lösung von Aufgabe 3:

a) $p'(x) = 2x - 28 < 0$ für alle $x \in [0; 9]$
d.h. $p(x)$ ist monoton fallend.

b)
$$\begin{aligned} G(x) &= U(x) - K(x) \\ U(x) &= p(x) \cdot x = (x^2 - 28x + 196)x = x^3 - 28x^2 + 196x \\ G(x) &= x^3 - 28x^2 + 196x - 2x^2 - 12x - 56 = x^3 - 30x^2 + 184x - 56 \end{aligned}$$
d.h. $G(x) = x^3 - 30x^2 + 184x - 56$

c)
$$\begin{aligned} G'(x) &= 3x^2 - 60x + 184 \\ G''(x) &= 6x - 60 \end{aligned}$$
Notwendige Bedingung:
$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 60x + 184 && |: 3 \\ 0 &= x^2 - 20x + \frac{184}{3} && |\ pq - Formel \\ x &= 10 \pm \sqrt{100 - \frac{184}{3}} \\ x &= 10 \pm 6{,}22 \end{aligned}$$
$x = 3{,}78 \quad$ oder $\quad \underbrace{x = 16{,}22}_{\notin \text{ Def.bereich}}$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = 6x - 60 <_{\text{immer}} 0$ für alle $x \in (0; 9)$
d.h. $x = 3{,}78$ globales Max auf [0;9]
$G(3{,}78) = 264{,}88$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 264,88 €.

d) Stückkosten
$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = 2x + 12 + \frac{56}{x};\quad x \in (0; 9]$$
$$k'(x) = 2 - \frac{56}{x^2}$$

$k''(x) = \dfrac{112}{x^3}$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& 2 - \dfrac{56}{x^2} & | \cdot x^2 \\ 0 &=& 2x^2 - 56 & | +56 \\ 56 &=& 2x^2 & |: 2 \\ 28 &=& x^2 & \text{Wurzel} \end{array}$$

$x = 5{,}29$ oder $\underbrace{x = -5{,}29}_{\notin \text{ Def.bereich}}$

Hinreichende Bedingung:

$k''(x) = \dfrac{112}{x^3} >_{\text{immer}} 0$; da $x > 0$

d.h. $x = 5{,}29$ globales Min.

d.h. die Stückkosten-minimale Menge beträgt 5,29 ME.

Lösung von Aufgabe 4:

$x_1 =$ ME von Produkt 1

$x_2 =$ ME von Produkt 2

a)
$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ \text{II} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 100 \\ \text{III} & 3x_1 + x_2 & \leq & 75 \end{array}$$

$12x_1 + 8x_2 \stackrel{!}{=}$ maximal; $x_1, x_2 \geq 0$

b) Simplex-Algorithmus

1	x_1	x_2	
e_1	$\boxed{4}$	2	80
e_2	2	3	100
e_3	3	1	75
	-12	-8	0

2	e_1	x_2	
x_1	$1/4$	$1/2$	20
e_2	$-1/2$	$\boxed{2}$	60
e_3	$-3/4$	$-1/2$	15
	3	-2	240

3	e_1	e_2	
x_1		$-1/4$	5
x_2	$-1/4$	$1/2$	30
e_3		$1/4$	30
	$5/2$	1	300

Optimale Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ Optimaler Z-Wert = 300

d.h. um einen maximalen Gewinn von 300 € zu erzielen, sind 5 ME von Produkt 1 und 30 ME von Produkt 2 herzustellen.

c)
$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ \text{II} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 100 \\ \text{III} & 3x_1 + x_2 & \leq & 75 \\ \text{IV} & x_1 + x_2 & \geq & 30 \\ \text{V} & 3x_1 + x_2 & = & 45 \end{array}$$

$12x_1 + 8x_2 \stackrel{!}{=}$ maximal; $x_1, x_2 \geq 0$

Simplex-Algorithmus

1	x_1	x_2	
e_1	$\boxed{4}$	2	80
e_2	2	3	100
e_3	3	1	75
e_4	-1	-1	-30
e_5^*	3	$\boxed{1}$	45
	-12	-8	0

2	x_1	e_5^*	
e_1	-2	$\bullet$	-10
e_2	-7	$\bullet$	-35
e_3	0	$\bullet$	30
e_4	2	$\bullet$	15
x_2	3	$\bullet$	45
	12	$\bullet$	360

d) Setzen wir $x_1 = 5$ und $x_2 = 30$ in die hinzu gekommenen Nebenbedingungen IV und V ein, so sind diese Nebenbedingungen erfüllt. Also ändert sich die optimale Lösung unter c) nicht.

Lösung von Aufgabe 5:

Existiert die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, so muss gelten:

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

d.h. diese Aufgabe kann mit der obigen Formel bearbeitet werden oder mit vollständiger Elimination.

a) Vollständige Elimination:

Zeile					Operation
1	$\boxed{1}$	2	1	0	
2	3	4	0	1	
3	1	2	1	0	1
4	0	-2	-3	1	2 $-3 \cdot$ 1
5	1	0	-2	1	3 + 4
6	0	-2	-3	1	4
7	1	0	-2	1	5
8	0	1	$3/2$	$-1/2$	6 $\div(-2)$

Also ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

b) Vollständige Elimination:

Zeile					Operation
1	$\boxed{1}$	3	1	0	
2	2	4	0	1	
3	1	3	1	0	1
4	0	-2	-2	1	2$-2\cdot$ 1
5	2	0	-4	3	$2\cdot$ 3$+3\cdot$ 4
6	0	-2	-2	1	4
7	1	0	-2	$3/2$	5$\div 2$
8	0	1	1	$-1/2$	6$\div(-2)$

Also ist $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$

d) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 25/4 & -11/4 \\ -11/4 & 5/4 \end{bmatrix}$