Mathematik-Klausur vom 05.07.2012
Finanzmathematik-Klausur vom 11.07.2012

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 1,2,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

Betrachtet werden im Rahmen der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung die drei Hilfskostenstellen K_1, K_2 und K_3, die ihre Leistungen (gemessen in LE) an verschiedene Hauptkostenstellen abgeben, sich aber auch wechselseitig mit Leistungen beliefern.

Die Leistungsabgaben an die Hauptkostenstellen, die gegenseitigen Leistungsabgaben zwischen den Hilfskostenstellen und die in den Hilfskostenstellen anfallenden Primärkosten (in GE) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Lieferant	Empfänger				Primärkosten
	K_1	K_2	K_3	Hauptkostenstellen	
K_1	0	12	16	32	60
K_2	8	0	20	22	160
K_3	24	10	0	16	200

a) Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

b) Wie lauten die innerbetrieblichen Verrechnungspreise, wenn sich sämtliche Angaben wie folgt verdoppeln:

Lieferant	Empfänger				Primärkosten
	K_1	K_2	K_3	Hauptkostenstellen	
K_1	0	24	32	64	120
K_2	16	0	40	44	320
K_3	48	20	0	32	400

(Begründung!)

Aufgabe 2

I Gegeben ist eine Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 - 12x^4 + x^3 + 3x^2}{x^2} \quad ; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
(*Hinweis: Der Zähler muss dazu nur teilweise faktorisiert werden.*)

b) Bestimmen Sie die Wendestelle von $f(x)$.

c) Prüfen Sie, ob es sich bei der Wendestelle aus b) um eine Sattelstelle handelt.

II Ein deutsches Unternehmen stellt $x = 200$ ME eines Produktes her und verkauft diese in die USA. Die Grenzkosten seien $K'(200) = 40$ Euro, der Grenzerlös sei $U'(200) = 50$ Dollar.
Für welchen Wevhselkurs w (in Dollar pro Euro) lohnt es sich, mehr als 200 ME zu produzieren und in die USA zu verkaufen? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 3
Ein Unternehmen produziert und vertreibt zwei Güter A und B. Zu Planungszwecken arbeitet das Unternehmen mit der folgenden Gewinnfunktion:

$$G(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 1 \quad ; x_1, x_2 \geq 0.$$

Dabei sei x_1 die Produktions- und Absatzmenge von Gut A und x_2 die Produktions- und Absatzmenge von Gut B.

a) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

b) Aufgrund von ständigen Veränderungen auf dem Absatzmarkt kann der Faktor vor x_2^2 nicht exakt bestimmt werden. Das Unternehmen arbeitet daher mit der Gewinnfunktion

$$G(x_1, x_2) = -x_1^2 - a \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 1 \quad ; x_1, x_2 \geq 0.$$

Dabei wird $a > 0{,}25$ vorausgesetzt. Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktions- und Absatzmengen in Abhängigkeit von $a > 0{,}25$. Für welche $a > 0{,}25$ ist die Lösung ökonomisch sinnvoll?

Aufgabe 4
Bei 4,2% Jahreszins bestehen die folgenden Zahlungsverpflichtungen:

- 10 000 Euro am 01.01.2013
- 20 000 Euro am 01.01.2017
- 15 000 Euro am 01.01.2018

Der Schuldner möchte seine Schulden zurückzahlen durch

a) gleich hohe vorschüssige Quartalsraten. Die erste Quartalsrate ist fällig am 01.01.2013, die letzte Quartalsrate soll am 01.10.2018 gezahlt werden. Wie hoch sind die Quartalsraten?

b) gleich hohe vorschüssige Monatsraten über 1 000 Euro. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2013. Wie viele volle Monatsraten muss er zahlen?

c) drei gleich hohe Beträge fällig am

- 01.01.2013
- 01.01.2017
- 01.01.2019

Wie hoch sind diese Rückzahlungsbeträge?

Aufgabe 5
Eine Investition in Höhe von 32 220 Euro hätte eine Nutzungsdauer von fünf Jahren bei folgenden (Perioden-)Überschüssen:

1. Jahr 10 000 €
2. Jahr 10 000 €
3. Jahr 15 000 €
4. Jahr 3 000 €
5. Jahr 2 500 €

Die Geschäftsführung gibt einen (Erwartungs-)Zinsfuß von 10% p.a. vor. Würden Sie als zuständige/r Verantwortliche/r einen Investitionsantrag stellen; d.h. lohnt sich die Investition? (Begründung!)

Aufgabe 6

a) Ein Zeichnung von Picasso wurde im Jahr 1997 für 150 000 € erworben. Nach zehn Jahren (hier genau nach zehn Jahren) wurde diese Zeichnung für 1,2 Mio. € in London bei Christie's versteigert. Wie hoch war für den (ehemaligen) Besitzer nach Abzug von 15% als Vermittlungsgebühr für Christie's die jährliche Rendite (der interne Zinsfuß)?

b) Einem Münzhändler wird eine antike Münze zum Kauf angeboten, die der Händler glaubt nach zwei Jahren für 75 € wieder verkaufen zu können. Welchen Betrag darf er maximal für den Ankauf dieser Münze aufwenden, wenn er eine Rendite (einen Zins) von mindestens 20% p.a. erzielen will?

Aufgabe 7
Ein Händler vereinbart mit seinem Kunden für einen Klavierkauf eine Ratenzahlung in Höhe von 200 Euro zahlbar zu Beginn eines Monats über fünf Jahre. Die erste Monatsrate ist fällig sofort bei Kauf.

a) Die Konkurrenz bietet für das gleiche Klavier einen Ratenkauf an mit vorschüssigen Quartalsraten in Höhe von 740 Euro über vier Jahre, erste Rate fällig sofort bei Kauf. Welches der beiden Angebote ist günstiger, wenn ein Jahreszins von 4% unterstellt wird? (Begründung!)

b) Der Kunde möchte das Angebot seines Händlers annehmen, jedoch schon binnen drei (statt fünf) Jahren das Klavier durch vorschüssige Monatsraten abbezahlen. Wie hoch wären vorschüssige Monatsraten über drei Jahre, wenn wiederum ein Jahreszins von 4% unterstellt wird?

c) Wie hoch wären in einem äquivalenten Finanzierungsmodell zwei gleich hohe Raten, erste Rate fällig bei Kauf, zweite Rate fällig zwei Jahre nach Kauf, wenn wiederum ein Jahreszins von 4% unterstellt wird?

Aufgabe 8

Die Geschäftsführung möchte gerne anlässlich des Vorhabens, in zwei Jahren neue Investoren zu überzeugen, sich an dem Unternehmen zu beteiligen, bestehende Kredit-Schulden abbauen. Es soll geprüft werden, ob finanziell eine Änderung der Rückzahlung von drei bestehenden Krediten durch einen einmaligen Betrag möglich ist.

Die Gelegenheit dazu bietet sich Ende 2013, weil dann dem Unternehmen aus einer früher getätigten (Geld-)Anlage von damaligen Gewinnen ein hoher Betrag zur Verfügung stehen wird.

Das Unternehmen hatte nämlich mit (Zins-)Wirkung ab dem 02.09.2010 eine Summe von 800 000 € zu folgenden Zins-Konditionen (relativ gemischte Verzinsung) angelegt:

- in 2010 mit 4% p.a.
- in 2011 mit 3% p.a. und
- in 2012 und 2013 mit 2% p.a.

a) Diese Finanzanlage kann am Ende des Jahres 2013 aufgelöst werden (2013 zählt noch als ganzes Zinsjahr), um die Rückzahlung der Kredite durchführen zu können. Welcher Betrag würde dann Ende 2013 ans Unternehmen ausgezahlt werden?

b) Sie werden gebeten zu ermitteln, durch welchen einmaligen Betrag Ende 2013 drei bisher vereinbarte Kreditrückzahlungen ersetzt werden könnten, und ob der dann aus der (Geld-)Anlage zur Verfügung stehende Betrag dazu ausreicht.

   Ersetzt werden sollen die drei folgenden Zahlungen (Zinsfuß 5% p.a., relativ gemischte Verzinsung, Bewertungsstichtag 31.12.2013) von

   - 200 000 € genau Jahresmitte 2013
   - 300 000 € Ende 2013
   - 400 000 € Ende 2016

Lösung zu Aufgabe 1:
v_1 = Bewertung in GE für ein in K_1 hergestellte LE
v_2 = Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3 = Bewertung in GE für einen in K_3 hergestellte LE

a) Kostengleichgewicht:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & (12+16+32)v_1 - 8v_2 - 24v_3 & = & 60 \\ \text{II} & (8+20+22)v_2 - 12v_1 - 10v_3 & = & 160 \\ \text{III} & (24+10+16)v_3 - 16v_1 - 20v_2 & = & 200 \end{array}$$

Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	60	−8	−24	60	
2	$\boxed{-12}$	50	−10	160	
3	−16	−20	50	200	
4	−12	50	−10	160	2
5	0	$\boxed{242}$	−74	860	1+5 · 2
6	0	−260	190	−40	3 · 3−4 · 2
7	−12	50	−10	160	4
8	0	242	−74	860	5
9	0	0	26 740	213 920	242 · 6+260 · 5

9 $26\,740 v_3 = 213\,920 \Leftrightarrow v_3 = 8$
8 $242 v_2 - 74 \cdot 8 = 860 \Leftrightarrow v_2 = 6$
7 $-12 v_1 + 50 \cdot 6 - 24 \cdot 8 = 200 \Leftrightarrow v_1 = 5$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 5 GE, in K_2 genau 6 GE und in K_3 genau 8 GE.

b) Für das neue Kostengleichgewicht wird das alte Kostengleichgewicht aus a) lediglich mit der Zahl Zwei multipliziert, insofern ändern sich die Verrechnungspreise nicht.

Lösung zu Aufgabe 2:

I) a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^5 - 12x^4 + x^3 + 3x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x^3 - 12x^2 + x + 3)}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} (x^3 - 12x^2 + x + 3) = 3$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 24x + 1$
$f''(x) = 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$f'''(x) = 6$ und $f'''(4) \neq 0$
d.h. $x = 4$ Wendestelle

c) $f'(4) = 48 - 96 + 1 \neq 0$
d.h. $x = 4$ ist keine Sattelstelle.

II G ist monoton steigend, falls gilt: $G' = U' - K' > 0$; d.h. $U' > K'$
$50 > 40w \Leftrightarrow w < 1{,}25$
d.h. für einen Wechselkurs unter 1,25 Dollar lohnt es sich, mehr als 200 ME herzustellen.

Lösung zu Aufgabe 3:

a)
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1,x_2) &= -2x_1 - x_2 + 2 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= -2 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &= -4x_2 - x_1 + 3 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= -4 \\ & & G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= -1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{cccll} \text{I} & 0 & = & -2x_1 - x_2 + 2 & \\ \text{II} & 0 & = & -x_1 - 4x_2 + 3 & \\ \hline \text{I} - 2\cdot\text{II} & 0 & = & 7x_2 - 4 & \Rightarrow x_2 = \frac{4}{7} \\ \text{II} & x_1 & = & -4\cdot\frac{4}{7} + 3 = \frac{-16+21}{7} = \frac{5}{7} & \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x_1,x_2) = (-2)\cdot(-4) - (-1)^2 = 7 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_1x_1}(x_1,x_2) = -2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $(\frac{5}{7};\frac{4}{7})$ glob. Max.
$G(\frac{5}{7};\frac{4}{7}) = \frac{28}{49} = 0{,}57$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 0,57 GE.

b)
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1,x_2) &= -2x_1 - x_2 + 2 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= -2 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &= -2ax_2 - x_1 + 3 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= -2a \\ & & G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= -1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{cccll} \text{I} & 0 & = & -2x_1 - x_2 + 2 & \\ \text{II} & 0 & = & -x_1 - 2ax_2 + 3 & \\ \hline \text{I} - 2\cdot\text{II} & 0 & = & (4a-1)x_2 - 4 & \Rightarrow x_2 = \frac{4}{4a-1} \\ \text{I} & 2x_1 & = & \frac{-4}{4a-1} + 2 \Leftrightarrow x_1 = 1 - \frac{2}{4a-1} = \frac{4a-1-2}{4a-1} = \frac{4a-3}{4a-1} & \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x_1,x_2) = (-2)\cdot(-2a) - (-1)^2 = 4a - 1 >_{\text{immer}} 0$; da $a > 0{,}25$
$G_{x_1x_1}(x_1,x_2) = -2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $(\frac{4a-3}{4a-1};\frac{4}{4a-1})$ glob. Max.
Ökonomisch sinnvoll, falls:
$$x_1 = \frac{4a-3}{4a-1} \geq 0 \Leftrightarrow 4a \geq 3 \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{4}$$

$x_2 = \dfrac{4}{4a-1} \geq 0$ ist erfüllt, da $a > 0{,}25$.
d.h. die Lösung ist nur ökonomisch sinnvoll, falls gilt $a \geq \frac{3}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Barwert der Schulden am 01.01.2013: $K_0 = 10\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}042^4} + \dfrac{15\,000}{1{,}042^5} = 39\,176{,}25$

a) Die Laufzeit der vorschüssigen Quartalsrente beträgt genau sechs Jahre.
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$39\,176{,}25 = r_J \cdot \dfrac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^6} \Rightarrow r_J = 7\,522{,}065$
Vorschüssige Quartalsraten r'_Q:
$7\,522{,}065 = r'_Q \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}042\right) \Rightarrow r'_Q = 1\,832{,}42$
d.h. die Quartalsraten betragen 1 832,42 Euro.
2. Lösungsweg:
$r'_Q = 39\,176{,}25 \cdot 1{,}042^6 \cdot \dfrac{0{,}042}{(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) \cdot (1{,}042^6 - 1)} = 1\,832{,}42$

b) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,273$
Laufzeit n in Jahren:
$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{39\,176{,}25}{12\,273} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 3{,}498803$
3,498803 Jahre $= 3{,}498803 \cdot 12 = 41{,}98564$ Monate
d.h. es sind 41 volle Monatsbeträge zu zahlen.

c) $39\,176{,}25 = x + \dfrac{x}{1{,}042^4} + \dfrac{x}{1{,}042^6} = 2{,}629517 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{39\,176{,}25}{2{,}629517} = 14\,898{,}65$
d.h. die drei gleich hohen Rückzahlungen betragen 14 898,65 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

$$K_0 = \frac{10\,000}{1{,}1} + \frac{10\,000}{1{,}1^2} + \frac{15\,000}{1{,}1^3} + \frac{3\,000}{1{,}1^4} + \frac{2\,500}{1{,}1^5} - 32\,220 = 6{,}437588 > 0$$

d.h. mathematisch betrachtet lohnt sich die Investition, weil der Kapitalwert positiv ist. Wirtschaftlich betrachtet sollten jedoch bei einem Plus von 6 Euro andere Gründe für oder gegen die Investition herangezogen werden.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $1\,200\,000 \cdot 0{,}85 = 1\,020\,000$
$0 = \dfrac{1\,020\,000}{q^{10}} - 150\,000 \Leftrightarrow q = \sqrt[10]{\dfrac{1\,020\,000}{150\,000}} = 1{,}211298$
d.h. der interne Zins beträgt etwa 21,1%.

b) $75 = K_0 \cdot 1{,}2^2 \Leftrightarrow K_0 = \dfrac{75}{1{,}2^2} = 52{,}08333$

d.h. der Verkaufspreis darf höchstens etwa 52,08 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 7:

a) $R_0' = 200(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^5} = 10\,915{,}87$

$R_0' = 740(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^4} = 11\,013{,}10$

d.h. gemessen am Barwert ist das Händler-Angebot günstiger.

b) $10\,915{,}87 = r_J \cdot \dfrac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^3} \Leftrightarrow r_J = 3\,933{,}518$

$3\,933{,}518 = r_M' \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r_M' = 320{,}8416$

d.h. die Monatsraten würden 320,84 Euro betragen.

c) $10\,915{,}87 = x + \dfrac{x}{1{,}04^2} \Leftrightarrow x = 5\,671{,}889$

d.h. die beiden Zahlungen müssten 5 671,89 Euro betragen.

Lösung zu Aufgabe 8:

a) $K_{3+\frac{29+30+30+30}{360}} = 800\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{119}{360} \cdot 0{,}04\right) \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02^2 = 868\,624{,}87$

d.h. es werden 868 624,87 € ausgezahlt.

b) $200\,000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) + 300\,000 + \dfrac{400\,000}{1{,}05^3} = 850\,535{,}04 < 868\,624{,}87$

d.h. die Einmalzahlung würde 850 535,04 € betragen und die Auszahlung aus a) würde reichen.