Mathematik-Klausur vom 05.10.2011
Finanzmathematik-Klausur vom 26.09.2011

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-2x^2 - 2x + 12}{3x + 9}$

b) Bestimmen Sie die Wendestelle der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2; \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der nachfolgenden Funktion:

$$f(x, y) = e^x + \ln(y^2 + 1) + 2x^2y \ \ ; x, y, \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

a) Gegeben sind die beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie:

1. $3 \cdot A - B$
2. $A \cdot B$
3. $B \cdot A$

b) In einer Produktlinie des Unternehmens werden in einem mehrstufigen Prozess aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Der Gesamtbedarf an Rohstoffen zur Herstellung je einer ME der Endprodukte lässt sich aus der folgenden Matrix ablesen:

$$\begin{bmatrix} 40 & 70 & 120 \\ 48 & 100 & 208 \end{bmatrix}$$

Von R_1 stehen 1 030 ME und von R_2 1 636 ME zur Verfügung.
Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramme für die drei

Endprodukte. Dabei sind die Produktionsprogramme ökonomisch sinnvoll, wenn sie ganzzahlig und nicht negativ sind. Zur Lösung dieser Fragestellung gehen Sie wie folgt vor:

1. Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
2. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.
3. Geben Sie alle nicht negativen Lösungen an.
4. Geben Sie alle ganzzahligen nicht negativen Lösungen an.

Aufgabe 3
Ein Monopolist produziert zwei Güter A und B. Der Preis p für Gut A wird bestimmt aus der Absatzmenge x mittels der Preisabsatzfunktion

$$p(x) = 10 - x; \;\; 0 \leq x \leq 10$$

Für Gut B ergibt sich der Preis q aus der Absatzmenge y der Preisabsatzfunktion

$$q(y) = 10 - y; \;\; 0 \leq y \leq 10$$

Der Monopolist arbeitet mit der linearen Kostenfunktion

$$K(x, y) = 3x + y + 10; \;\; x, y \geq 0$$

Aufgrund der gegebenen Produktionskapazitäten können von Gut A und B zusammen genau zehn Mengeneinheiten produziert werden. Bestimmen Sie das Gewinnmaximale Produktionsprogramm mittels der Methode von Lagrange.

Aufgabe 4
Herr F. hat zu Beginn des Jahres 2003 einen Kredit über 30 000 € zu 6,5% Zinseszinsen p.a. aufgenommen, den er mit vorschüssigen Monatsraten in Höhe von 184,93 € zurückzahlt.

a) Wie hoch wäre bei jährlichen statt monatlichen Zahlungen die Annuität?

b) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen?

c) Anfang Januar 2011 erbt Herr F. überraschend 27 000 €. Wie lautet die Tilgungsplan-Zeile für das Jahr 2010? Und könnte Herr F. mit der Erbschaft auf einen Schlag seine Restschuld Anfang Januar 2011 zurückzahlen?

Aufgabe 5
Für einen Hauskauf wird bei 4% Jahreszinsen eine Hypothek in Höhe von 250 000 € aufgenommen. Die Schuld soll zurückgezahlt werden durch

a) Annuitätentilgung über zwanzig Jahre, wobei die erste Annuität fällig ist ein Jahr nach Kapitalaufnahme. Wie hoch sind die Annuitäten?

b) Annuitäten in Höhe von 15 000 €, wobei die erste Annuität fällig ist ein Jahr nach Kapitalaufnahme. Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) drei gleich hohe Beträge nach fünf bzw. nach zehn bzw. nach zwölf Jahren. Wie hoch sind die Beträge bei 4% Jahreszinsen?

Aufgabe 6
Ein Unternehmen finanziert eine Erweiterungsinvestition mit einem Kredit, dessen Zinssatz flexibel vereinbart wird, d.h. der Zinssatz wird monatlich überprüft und je nach Entwicklung der Kapitalmärkte angepasst. Die Laufzeit des Kredits beträgt drei Jahre. Die Verzinsung wird als monatliche Verzinsnung zum relativen Zins vereinbart. Die Aufgenommene Schuld und die aufgelaufenen Zinsen werden am Ende der Laufzeit komplett zurückgezahlt. Zusammengefasst ergibt sich:

Auszahlung der Kreditsumme: 01.09.2011
Auszahlungsbetrag: 1 000 000 €
Anfänglicher Zinssatz: 4,92% p.a.
Monatliche Zahlung: 0 €
Tilgung der Schuld: 31.08.2014
Zahlung der aufgelaufenen Zinsen: 31.08.2014

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen an die Bank am 31.08.2014 zu zahlen hat, wenn sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.09.2011 bis 31.08.2014 nicht ändert? Am Ende welchen Monats übersteigt die Schuld erstmalig den Wert von 1 150 000 €?

b) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen an die Bank am 31.08.2014 zu zahlen hat, wenn sich der flexible Zinssatz zum 01.01.2013 auf 5,04% p.a. und zum 01.12.2013 auf 5,28% p.a. erhöht? Am Ende welchen Monats übersteigt die Schuld erstmalig den Wert von 1 150 000 €?

c) Das Unternehmen geht davon aus, dass der flexible Zinssatz erstmalig zum 01.01.2013 auf 5,04% p.a. steigt. Mit einer zweiten Erhöhung rechnet es am 01.12.2013. Wie hoch darf diese zweite Erhöhung maximal sein, damit die Zahlung des Unternehmens an die Bank zum 31.08.2014 den Betrag 1 165 000 € nicht übersteigt?

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-2x^2-2x+12}{3x+9} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-2(x^2+x-6)}{3(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-2(x-2)(x+3)}{3(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-2(x-2)}{3} = \dfrac{10}{3}$

b) $f'(x) = x^2 - 14x$
$f''(x) = 2x - 14$
$f'''(x) = 2$
Notwendige Bedingung:
$0 = f''(x) = 2x - 14 \Leftrightarrow x = 7$
Hinreichende Bedingung:
$f'''(7) = 2 \neq 0$
d.h. $x = 7$ Wendestelle.

c) $f_x(x,y) = e^x + 4xy$ $\quad f_{xx}(x,y) = e^x + 4y$

$f_y(x,y) = \dfrac{2y}{y^2+1} + 2x^2$ $\quad f_{yy} = 2 \cdot \dfrac{1-y^2}{(y^2+1)^2}$

$f_{xy} = 4x$

Lösung zu Aufgabe 2

a) 1. $3 \cdot A - B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 22 \\ 25 & 11 \end{bmatrix}$

3. $B \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 44 & 33 \end{bmatrix}$

b) 1. $e_1 =$ ME von E_1
$e_2 =$ ME von E_2
$e_2 =$ ME von E_3

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 40e_1 + 70e_2 + 120e_3 & = & 1\,030 \\ \text{II} & 48e_1 + 100e_2 + 208e_3 & = & 1\,636 \end{array}$$

2. Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3	r	Operation
①	$\boxed{40}$	70	120	1 030	
②	48	100	208	1 636	
③	40	70	120	1 030	①
④	0	80	320	2 000	$5 \cdot$ ② $- 6 \cdot$ ①

④ $80e_2 + 320e_3 = 2\,000 \Leftrightarrow e_2 = 25 - 4e_3$

③ $40e_1 + 70(25 - 4e_3) + 120e_3 = 1\,030 \Leftrightarrow e_1 = 4e_3 - 18$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4e_3 - 18 \\ 25 - 4e_3 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \mathbb{R} \}$$

3. Nicht negative Lösungen:
$e_1 = 4e_3 - 18 \geq 0 \Leftrightarrow 4e_3 \geq 18 \Leftrightarrow e_3 \geq 4{,}5$
$e_2 = 25 - 4e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 25 \geq 4e_3 \Leftrightarrow 6{,}25 \geq e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq 6{,}25$
$e_3 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4e_3 - 18 \\ 25 - 4e_3 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in [4{,}5\,;\, 6{,}25] \}$$

4. Ganzzahlige nicht negative Lösungen:
$e_3 = 5 \Rightarrow e_1 = 2$ und $e_2 = 5$
$e_3 = 6 \Rightarrow e_1 = 6$ und $e_2 = 1$

Lösung zu Aufgabe 3

$G(x,y) = p(x) \cdot x + q(y) \cdot y - K(x,y) = -x^2 - y^2 + 7x + 9y - 10;\;\; x, y \in [0;10]$

$L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 7x + 9y - 10 + \lambda(x + y - 10)$

$$\begin{array}{rclrcl} L_x(x,y,\lambda) & = & -2x + 7 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -2 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & -2y + 9 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 & = & -2x + 7 + \lambda & \\ \text{II} & 0 & = & -2y + 9 + \lambda & \\ \text{III} & 0 & = & x + y - 10 & \Leftrightarrow x = 10 - y \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 & = & -2x + 2y - 2 = & -2(10 - y) + 2y - 2 = 4y - 22 \Leftrightarrow y = 5{,}5 \\ \text{III} & 0 & = & x + 5{,}5 - 10 = & \Leftrightarrow x = 4{,}5 \\ \hline \end{array}$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;\lambda_0) = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x;y;\lambda_0) = -2 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in (4,5; 5,5) ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r_{\text{jährlich}} = 184{,}93\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) = 2\,297{,}29$
d.h. die Annuitäten betragen 2 297,29 €.

b) $\dfrac{R_0}{r_j} = \dfrac{30\,000}{2\,297{,}29} = 13{,}0588$

$n = -\dfrac{\ln[1 - 13{,}0588 \cdot 0{,}065]}{\ln 1{,}065} = 30{,}0012$

d.h. es sind 30 volle Annuitäten zu zahlen.

c) 2010 $\widehat{=}$ 8. Jahr

$$\begin{array}{rcl} K_7 & = & 30\,000 \cdot 1{,}065^7 - 2\,297{,}29 \cdot \frac{1{,}065^7 - 1}{0{,}065} = 27\,040{,}09 \\ Z_8 & = & K_7 \cdot 0{,}065 = 1\,757{,}61 \\ T_8 & = & A - Z_8 \\ K_8 & = & K_7 - T_8 \end{array}$$

Jahr	Zinsen a.E.d.J	Tilgung a.E.d.J	Annuität a.E.d.J	Restschuld a.E.d.J
8	1 757,61	539,67	2 297,29	26 500,40

d.h. Herr F. könnte Anfang 2011 mit der Erbschaft von 27 000 € seine Restschuld von 26 500,40 € begleichen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $A = 250\,000 \cdot 1{,}04^{20} \cdot \dfrac{0{,}04}{1{,}04^{20} - 1} = 18\,395{,}44$

d.h. die Annuitäten betragen 18 395,44 €.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{250\,000}{15\,000} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 28{,}01102$

d.h. es sind 28 volle Annuitäten zu leisten.

$K_{28} = 250\,000 \cdot 1{,}04^{28} - 15\,000 \cdot \dfrac{1{,}04^{28} - 1}{0{,}04} = 162{,}0851$

$K_{28} \cdot q = 168{,}5685$

d.h. die Restzahlung beträgt 168,57 €.

c) $250\,000 = \dfrac{x}{1{,}04^5} + \dfrac{x}{1{,}04^{10}} + \dfrac{x}{1{,}04^{12}} \Leftrightarrow 250\,000 = 2{,}122088x \Leftrightarrow x = 117\,808{,}5$

d.h. die Zahlungen betragen jeweils 117 808,5 €.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $K_3 = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{3\cdot 12} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}0041^{36} = 1\,158\,699{,}49$

d.h. die Rückzahlsumme am 31.08.2014 beträgt 1 158 699,49 €.

$j = \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}05032476$

$n = \dfrac{\ln \frac{1\,150\,000}{1\,000\,000}}{\ln 1{,}05032476} = 2{,}846509$

$0{,}846509 \cdot 12 = 10{,}15811$ Monate

d.h. nach zwei Jahren und elf Monaten wird am 01.08.2014 erstmals der Betrag von 1 150 000 € überschritten.

b) $K_3 = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{16} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0504}{12}\right)^{11} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0528}{12}\right)^{9} = 1\,163\,092{,}34$

d.h. die Rückzahlsumme am 31.08.2014 beträgt 1 163 092,34 €.

$K_{\frac{27}{12}} = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0492}{12}\right)^{16} \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0504}{12}\right)^{11} = 1\,118\,031{,}04$

$j = \left(1 + \dfrac{0{,}0528}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}054097$

$n = \dfrac{\ln \frac{1\,150\,000}{1\,118\,031{,}04}}{\ln 1{,}054097} = 0{,}5351285$

$0{,}5351285 \cdot 12 = 6{,}421542$ Monate

d.h. nach $16 + 11 + 7 = 34$ Monaten wird am 01.07.2014 erstmals der Betrag von 1 150 000 € überschritten.

c)
$$\begin{aligned}
1\,165\,000 &= 1\,118\,031{,}04 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^9 && \mid \div 1\,118\,031{,}04 \\
1.042010 &= \left(1 + \frac{i}{12}\right)^9 && \mid 9.\ \text{Wurzel} \\
1{,}004583 &= 1 + \frac{i}{12} && \mid -1 \\
0{,}004583 &= \frac{i}{12} && \mid \cdot 12 \\
i &= 0{,}0549949
\end{aligned}$$

d.h. der Jahreszins darf maximal 5,49949% betragen.