Mathematik-Klausur vom 6. Februar 2007

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,4,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,4,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 3,4	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 6x - 20}$$

b) Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange das absolute (globale) Minimum der Funktion:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 4$.

Aufgabe 2

In einem Kleinbetrieb werden aus zwei verschiedenen Materialien drei Produkte in Sortenfertigung hergestellt. Zu einem Zeitpunkt kann immer nur ein Produkt hergestellt werden. Der Materialverbrauch, die Produktionsdauer und die Kosten (in GE) je Mengeneinheit der Produkte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	M_1	M_2	Produktionsdauer	Kosten pro ME
Produkt 1	2	0	0,5 Tage	8
Produkt 2	2	5	1,5 Tage	12
Produkt 3	30	80	7,0 Tage	172

Vom Material M_1 stehen 210 ME und vom Material M_2 stehen 450 ME zur Verfügung. Die vorhandenen Materialmengen sollen restlos verbraucht werden. Die zur Verfügung stehende Produktionszeit von 60 Tagen soll voll ausgeschöpft werden.

a) Welche Endproduktmengen können unter den genannten Bedingungen hergestellt werden?

b) Wie groß sind die Produktionskosten?

Aufgabe 3

Ein Sparer legt am 31.03.2006 bei seiner Bank 10 000 € bei vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 3,5 % an.

a) Wie hoch ist die effektive Verzinsung, die der Sparer pro Jahr erhält?

b) Über welches Guthaben könnte der Sparer am 31.12.2009 verfügen?

c) Nach wie vielen Quartalen übersteigt das Guthaben des Sparers zum ersten Mal den Betrag von 11 000 € ?

d) Angenommen der Sparer hätte das Guthaben nicht einfach bis zum 31.12.2009 bei der Bank liegen gelassen, sondern es wäre zu den folgenden Kapitalbewegungen gekommen:

- zusätzliche Einzahlung von 5 000 € am 01.07.2007
- Abhebung von 2 000 € am 30.09.2008
- Abhebung von 1 000 € am 01.04.2009

Über welches Guthaben hätte der Sparer dann am 31.12.2009 verfügen können bei nach wie vor vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 3,5%?

Aufgabe 4
Auf ein Sparkonto zahlt ein Elternpaar bei 4% Jahreszinsen zur Finanzierung des Studiums eines Kindes wie folgt Beträge ein:

- Einzahlung am 31.12.2006 über 1 000 €
- Einzahlung am 31.12.2008 über 2 000 €
- Einzahlung am 31.12.2011 über 3 000 €
- regelmäßige Einzahlungen am Ende eines jeden Monats über 100 € ab dem Jahr 2010 bis einschließlich dem Jahr 2020.

a) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2024?

b) Wie viele volle Jahre lang können ab dem Jahr 2025 aus dem Guthaben jeweils 550 € zu Beginn eines Monats entnommen werden?

c) Welche gleich hohen regelmäßigen Abhebungen jeweils zu Beginn eines Monats können ab dem Jahr 2025 über sechs Jahre aus dem angesparten Guthaben entnommen werden?

Aufgabe 5
Ein Monopolist stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 her. Der Verbrauch an Rohstoffen für jeweils eine Mengeneinheit der Endprodukte ist aus folgender Tabelle (Produktionsmatrix) ersichtlich:

	Endprodukte		
Rohstoffe	E_1	E_2	E_3
R_1	1	1	1
R_2	2	0	2
R_3	4	2	4

Zur Produktion stehen von Rohstoff R_1 insgesamt 30 Mengeneinheiten, von Rohstoff R_2 insgesamt 40 Mengeneinheiten und von Rohstoff R_3 insgesamt 100 Mengeneinheiten zur Verfügung. Dieser zur Verfügung stehende Rohstoffvorrat soll komplett verbraucht werden.

Ein Produktionsprogramm - bestehend aus den Produktionsmengen der drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 - ist ökonomisch sinnvoll, wenn alle drei Produktionsmengen nicht negativ sind.

Für die drei Endprodukte geht der Monopolist von folgenden Preis-Absatz Funktionen aus:

$$\begin{aligned} p_1 &= 20 - x_1; \quad x_1 \in [0;20] \\ p_2 &= 40 - x_2; \quad x_2 \in [0;40] \\ p_3 &= 15 - x_3; \quad x_3 \in [0;15] \end{aligned}$$

Dabei seien:

- p_1 der Preis von Endprodukt E_1 und x_1 die hergestellte und abgesetzte Menge von Endprodukt E_1
- p_2 der Preis von Endprodukt E_2 und x_2 die hergestellte und abgesetzte Menge von Endprodukt E_2
- p_3 der Preis von Endprodukt E_3 und x_3 die hergestellte und abgesetzte Menge von Endprodukt E_3

a) Zeigen Sie, dass die ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramme gegeben sind durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 20 - x_3 \\ 10 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [0;20] \right\}$$

b) Bei welchem ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramm wird der Erlös (Umsatz) maximal? Wie hoch ist der maximale Erlös (Umsatz)?

Aufgabe 6

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Z}=x_1 + 3x_2 \to \max \\ &x_1 + 2x_2 \quad \leq \; 4 \\ &2x_1 + 2x_2 \quad \leq \; 8 \\ &3x_2 \qquad\quad\;\; \leq \; 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das lineare Optimeirungsproblem.

b) Interpretieren Sie bei der optimalen Lösung die Werte der Schlupfvariablen.

c) Interpretieren Sie im Endtableau die Schattenpreise.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 6x - 20} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)(x-1)}{2(x-5)(x+2)} = \dfrac{4}{2 \cdot 7} = \dfrac{2}{7}$

b) $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 4)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) &=& 2x+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 2 \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 2y+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x+y-4 & L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 &=& 2x+\lambda & \\ \text{II} & 0 &=& 2y+\lambda & \Rightarrow \text{I}-\text{II} \qquad 0 = 2x-2y \Rightarrow x=y \\ \text{III} & 0 &=& x+y-4 & \\ \hline \text{III} & 0 &=& x+x-4 & \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \\ \hline \text{I} & 0 &=& 2\cdot 2+\lambda & \Rightarrow \lambda = -4 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x,y,-4) = 2\cdot 2 - 0 = 4 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x,y,-4) = 2 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in (2;2) ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 2

	M_1	M_2	Produktionsdauer
Produkt 1	2	0	0,5 Tage
Produkt 2	2	5	1,5 Tage
Produkt 3	30	80	7,0 Tage
Kapazität	210	450	60 Tage

a) x_1= ME von Produkt 1

x_2= ME von Produkt 2

x_3= ME von Produkt 3

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 + 30x_3 &=& 210 \\ \text{II} & 5x_2 + 80x_3 &=& 450 \\ \text{III} & 0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 7x_3 &=& 60 \end{array}$$

Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	2	30	210	
2	0	5	80	450	
3	0,5	1,5	7	60	
4	2	2	30	210	1
5	0	$\boxed{5}$	80	450	2
6	0	4	−2	30	4 · 3 − 1
7	2	2	30	210	4
8	0	5	80	450	5
9	0	0	−330	−1 650	5 · 6 − 4 · 5

⑨ $-330x_3 = -1\,650 \Rightarrow x_3 = 5$
⑧ $5x_2 + 80 \cdot 5 = 450 \Rightarrow x_2 = 10$
⑦ $2x_1 + 20 + 150 = 210 \Rightarrow x_1 = 20$
d.h. es können 20 ME von Produkt 1, 10 ME von Produkt 2 und 5 ME von Produkt 3 hergestellt werden.

b) $8 \cdot 20 + 10 \cdot 12 + 5 \cdot 172 = 1\,140$
d.h. die Kosten betragen 1 140 GE.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^4 = 1{,}0355$
d.h. der Effektivzins beträgt 3,55 % p.a.

b) *1. Lösungsweg:*
$K_{3,75} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^{4 \cdot 3{,}75} = 10\,000 \cdot 1{,}00875^{15} = 11\,396{,}02$
d.h. das Guthaben beträgt 11 396,02 € .
2. Lösungsweg:
$K_{3,75} = 10\,000 \cdot 1{,}0355^{3{,}75} = 11\,396{,}02$

c) *1. Lösungsweg:*
$$\begin{aligned}
11\,000 &= 10\,000 \cdot \left(1 + \tfrac{0{,}035}{4}\right)^{4 \cdot n} && \mid \div 10\,000 \\
1{,}1 &= 1{,}00875^{4n} \\
4n &= \log_{1{,}100875} 1{,}1 \\
4n &= \frac{\ln 1{,}1}{1{,}00875} \\
4n &= 10{,}94 \text{ Quartale} && \mid \div 4 \\
n &= 2{,}735 \text{ Jahre}
\end{aligned}$$
d.h. nach elf Quartalen.
2. Lösungsweg:
$n = \frac{\ln\left[\frac{11\,000}{10\,000}\right]}{\ln 1{,}0355} = 2{,}735$ Jahre
$4 \cdot 2{,}735 = 10{,}94$ Quartale.

d) *1. Lösungsweg:*
$11\,396{,}02 + 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^{4 \cdot 2{,}5} - 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^{4 \cdot 1{,}25} - 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^{4 \cdot 0{,}75} = 13\,735{,}66$
d.h. das Guthaben beträgt 13 735,66 € .
2. Lösungsweg:
$11\,396{,}02 + 5\,000 \cdot 1{,}0355^{2{,}5} - 2\,000 \cdot 1{,}0355^{1{,}25} - 1\,000 \cdot 1{,}0355^{0{,}75} = 13\,735{,}66$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Guthaben am 31.12.2020:
$1000 \cdot 1{,}04^{14} + 2000 \cdot 1{,}04^{12} + 3000 \cdot 1{,}04^{9} + 100 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^{11} - 1}{0{,}04} = 25\,684$

Guthaben am 31.12.2024:
$25\,684 \cdot 1{,}04^4 = 30\,046{,}65$
d.h. das Guthaben beträgt 30 046,65 €.

b) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{30\,046{,}65}{550\cdot(12+6{,}5\cdot 0{,}04)} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 5{,}005155$
d.h. volle fünf Jahre lang können die Beträge entnommen werden.

c) $30\,046{,}65 = r'_M \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^6} \Rightarrow r'_M = 467{,}52$
d.h. über sechs Jahre können 467,52 € jeweils zu Beginn eine Monats entnommen werden.

Lösung zu Aufgabe 5

	E_1	E_2	E_3	Kapazität
R_1	1	1	1	30
R_2	2	0	2	40
R_3	4	2	4	100

a) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 30 \\ \text{II} & 2x_1 + 2x_3 & = & 40 \\ \text{III} & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 100 \end{array}$$

Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{1}$	1	1	30	
2	2	0	2	40	
3	4	2	4	100	
4	1	1	1	30	1
5	0	$\boxed{-2}$	0	-20	2 $-2\cdot$ 1
6	0	-2	0	-20	3 $-4\cdot$ 1
7	1	1	1	30	4
8	0	-2	0	-20	5
9	0	0	0	0	6 $-$ 5

8 $\;-2x_2 = -20 \Rightarrow x_2 = 10$
7 $\;x_1 + 10 + x_3 = 30 \Rightarrow x_1 = 20 - x_3$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 20 - x_3 \\ 10 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Menge der nicht negativen Lösungen:

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 20 - x_3 \\ 10 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in [0; 20]\}$$

b) Umsatz:

$$
\begin{aligned}
U(x_1,x_2,x_3) &= p_1\cdot x_1 + p_2\cdot x_2 + p_3\cdot x_3;\quad x_1\in[0;20], x_2\in[0;40], x_3\in[0;15]\\
&= 20x_1 - x_1^2 + 40x_2 - x_2^2 + 15x_3 - x_3^2
\end{aligned}
$$

Ziel: Umsatz $\overset{!}{=}$ maximal

unter NB: $x_1 = 20 - x_3$ und $x_2 = 10$

$$
\begin{aligned}
U(x_3) &= 20(20-x_3) - (20-x_3)^2 + 40\cdot 10 - 100 + 15x_3 - x_3^2\\
&= 400 - 20x_3 - 400 + 40x_3 - x_3^2 + 300 + 15x_3 - x_3^2\\
&= -2x_3^2 + 35x_3 + 300
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U'(x_3) &= -4x_3 + 35\\
U''(x_3) &= -4
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung:

$0 = -4x_3 + 35 \Rightarrow x_3 = 8{,}75$

Hinreichende Bedingung:

$U''(x_3) = -4 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $x_3 = 8{,}75$ glob. Max unter NB

d.h. unter den Nebenbedingungen ist der Umsatz maximal, wenn von Produkt E_3 genau $x_3 = 8{,}75$ ME abgesetzt werden.

$U(8{,}75) = 453{,}125$

d.h. der maximale Umsatz beträgt 453,13 GE.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$ Schlupfvariablen

Simplex-Algorithmus:

1.	x_1	x_2	
e_1	1	2	4
e_2	2	2	8
e_3	0	$\boxed{3}$	1
	-1	-3	0

2.	x_1	e_3	
e_1	$\boxed{1}$	-2/3	$3\frac{1}{3}$
e_2	2	-2/3	$7\frac{1}{3}$
x_2	0	1/3	1/3
	-1	1	1

3.	e_1	e_3	
x_1	1	-2/3	$3\frac{1}{3}$
e_2	-2	2/3	2/3
x_2	0	1/3	1/3
	1	1/3	$4\frac{1}{3}$

Die optimale Lösung sieht wie folgt aus:

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \hline e_1\\ e_2\\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3}\\ 1/3\\ \hline 0\\ 2/3\\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit optimalem Zielfunktionswert } Z = 4\tfrac{1}{3}
$$

b) Schlupfvariable $e_1 = 0$; d.h. die erste Nebenbedingung ist voll ausgeschöpft.
Schlupfvariable $e_2 = 2/3$; d.h. der Schlupf in der zweiten Nebenbedingung beträgt 2/3.
Schlupfvariable $e_3 = 0$; d.h. die dritte Nebenbedingung ist voll ausgeschöpft.

c) Die Schattenpreise geben an, um wie viele Einheiten sich der optimle Zielfunktionswert erhöht, wenn in den zugehörigen Nebenbedingungen der Schattenpreise die Restriktionssummen um eine Einheit erhöht werden.
Unter der Schlupfvariablen e_1 steht im Endtableau in der Zielfunktionszeile der Schattenpreis 1; d.h. lautet die Restriktionssumme der ersten Nebenbedingung

statt 4 jetzt 5, so erhöht sich für dieses neue Optimierungsproblem der optimale Zielfunktionswert von 4 1/3 um 1 Einheit auf 5 1/3.
Unter der Schlupfvariablen e_3 steht im Endtableau in der Zielfunktionszeile der Schattenpreis 1/3; d.h. lautet die Restriktionssumme der dritten Nebenbedingung statt 1 jetzt 2, so erhöht sich für dieses neue Optimierungsproblem der optimale Zielfunktionswert von 4 1/3 um 1/3 Einheiten auf 4 2/3.