Mathematik-Klausur vom 06.07.2010 und Finanzmathematik-Klausur vom 07.07.2010

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 48x}{7x + 56}$

b) Bestimmen Sie Extrem- und Sattelstellen der Funktion:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4xy + y^2 \ \ ; x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

a) In der Produktlinie A eines Unternehmens wird Salatsauce hergestellt. Die Gesamtkostenfunktion in Abhängigkeit der Menge x (in Tausend Liter) lautet:

$$K(x) = 8x^2 - 149{,}5x + 710$$

Tausend Liter der Salatsauce können unabhängig von der produzierten und angebotenenen Menge zu einem Preis von 2,5 Tausend Euro verkauft werden. Aufgrund eines Vertrags mit einem Großkonzern müssen 3,5 Tausend Liter Salatsauce produziert werden. Die Produktionskapazität beträgt 12 tausend Liter.

1. Erstellen Sie die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion sowie bestimmen Sie den jeweils ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für die Kostenfunktion, Umsatzfunktion und Gewinnfunktion.
2. Ermitteln Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm sowie den zugehörigen maximalen Gewinn.

b) In Produktlinie B des Unternehmens werden die Produkte Joghurt und Quark hergestellt. Die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Mengen x für Joghurt (in tausend Liter) und y für Quark (in Tausend Liter) lautet:

$$K(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 8y^2 - 24x - 32y + 400 \ \ ; x, y \geq 0$$

Bestimmen Sie das kostenminimnale Produktionsprogramm, wenn gleichzeitig die Produtktionsrestriktion $3x = 12y$ eingehalten werden muss. Bearbeiten Sie die Fragestellung mit Hilfe der Methode von Lagrange.

Aufgabe 3
Betrachtet werden im Rahmen der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung die drei Hilfskostenstellen K_1, K_2, K_3, die ihre Leistungen an verschiedene Hauptkostenstellen abgeben, sich aber auch wechselseitig mit Leistungen beliefern.
Die Leistungsabgaben an die Hauptkostenstellen, die gegenseitigen Leistungsabgaben zwischen den Hilfskostenstellen und die in den Hilfskostenstellen jeweils anfallenden Primärkosten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Lieferant	Empfänger				Leistungseinheit (LE)	Primärkosten (in TEUR)
	K_1	K_2	K_3	Hauptkostenstellen		
K_1	0	80	50	70	Stück	315
K_2	1	0	3	4	Kilogramm	240
K_3	3	4	0	43	Liter	235

a) Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.
2. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an. (Anmerkung: Lösungen ohne ausführliche Angabe des Lösungsweges werden nicht berücksichtigt, siehe auch Hinweis auf dem Deckblatt!)

b) Angenommen bei den drei Hilfskostenstellen besteht zusätzlich ein Eigenverbrauch (die Kostenstellen produzieren LE, die sie auch selbst wieder durch Einsatz verbrauchen). Der zusätzliche Eigenverbrauch bei K_1 beträgt zwanzig Stück, bei K_2 ein Kilogramm und bei K_3 zwei Liter. Durch die höheren in den Hilfskostenstellen produzierten LE erhöhen sich die Primärkosten bei K_1 auf 346 TEUR, bei K_2 auf 270 TEUR und bei K_3 auf 244 TEUR.
Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf und erläutern Sie kurz die Änderung des Gleichungssystems unter Aufgabe a) 1.
(Anmerkung: Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist **nicht** zu ermitteln.)

Aufgabe 4
Für den Erwerb eines Pkw stehen zwei verschiedene Finanzierungsmodelle zur Auswahl:

a) **Modell A**

- 5 000 Euro Sofortzahlung
- drei Jahre lang vorschüssige Monatsraten in Höhe von 300 Euro, erste Monatsrate ist fällig bei der Sofortzahlung
- am Ende des 3. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 4 200 Euro

Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells A bei 12,1 % Jahreszinsen?

b) **Modell B**

- 3 000 Euro Sofortzahlung
- vier Jahre lang vorschüssige Quartalsraten in Höhe von 750 Euro, erste Quartalsrate ist fällig bei der Sofortzahlung
- am Ende des 4. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 8 000 Euro

Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells B bei 12,1 % Jahreszinsen?

c) Welches der beiden Modelle A oder B ist bei 12,1% Jahreszinsen vorteilhafter? (Begründung!)

d) Der Interessent entscheidet sich für das Modell B. Für die Restzahlung aus dem Modell B nach vier Jahren in Höhe von 8 000 Euro möchte er von Anfang an vier Jahre lang am Ende eines jeden Monats Geld ansparen. Wie viel Euro muss er bei 1,8 % Jahreszinsen monatlich einzahlen, um die Restzahlung davon begleichen zu können?

Aufgabe 5

Einem Unternehmen werden zur Finanzierung einer Investition von seiner Hausbank die folgenden beiden Kreditangebote mit unterschiedlichen Laufzeiten unterbreitet:

Angebot 1: Kreditvolumen: 100 000 € Relativ gemischte Verzinsung bei einem Zins von 4,20% p.a. Monatlich nachschüssiger zu zahlender Betrag an die Bank: 600 €

Angebot 2: Kreditvolumen: 100 000 € Relativ gemischte Verzinsung bei einem Zins von 3,67% p.a. Monatlich nachschüssiger zu zahlender Betrag an die Bank: 600 €

a) Wie groß ist bei Angebot 1 die nach zehn Jahren verbleibende Restschuld?

b) Wie groß ist bei Angebot 2 die nach fünf Jahren verbleibende Restschuld?

c) Wie hoch müsste in Angebot 1 der monatlich nachschüssig an die Bank zu zahlende Betrag sein, damit der Kredit nach zehn Jahren zurückgezahlt ist?

Aufgabe 6

Bei 4,3% Jahreszins wird am 01.01.2010 für einen Hauskauf ein Kredit über 200 000 Euro aufgenommen. Als Rückzahlung wird Ratentilgung vereinbart über 25 Jahre, von denen die ersten fünf Jahre jedoch tilgungsfrei sind.

a) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für die Jahre 2013 und 2029 an.

b) Unerwartet können am 31.12.2019 neben der Annuität noch 30 000 Euro zurückgezahlt werden.

   1. Auf welchen Betrag reduzieren sich die Tilgungsbeträge in den nachfolgenden Jahren?

2. Und wie hoch ist die Annuität am 31.12.2020?
3. Es soll nur noch in den geraden Jahreszahlen 2020, 2022, 2024 usw. getilgt werden, die anfallenden Zinsen werden jedoch jedes Jahr gezahlt. Wie hoch sind dann die Tilgungsbeträge in den Jahren 2020, 2022, 2024, ...?

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 48x}{7x + 56} \lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x(x+8)(x-6)}{7(x+8)} = \lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x(x-6)}{7} = \dfrac{(-8)\cdot(-14)}{7} =$ 16

b) $f_x(x,y) = x^2 + 2x - 4y \quad f_{xx}(x,y) = 2x + 2$
$f_y(x,y) = -4x + 2y \quad f_{yy}(x,y) = 2$
$f_{xy}(x,y) = -4$
Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 0 & = & x^2 + 2x - 4y \\ \text{II} & 0 & = & -4x + 2y \\ \hline \text{I} + 2 \cdot \text{II} & 0 & = & x^2 - 6x \end{array} \quad = x(x-6) \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 6$$

1. Fall $x = 0 \Rightarrow$ II $0 = 2y \Leftrightarrow y = 0$
2. Fall $x = 6 \Rightarrow$ II $0 = -24 + 2y \Leftrightarrow y = 12$

d.h. stationäre Punkte sind (0;0) und (6;12).
Hinreichende Bedingung:
$D(x,y) = (2x+2)\cdot 2 - (-4)^2 = 4x - 12$
$D(0;0) = -12 < 0$: d.h. (0;0) Sattelstelle
$D(6;12) = 12 > 0$ und $f_{xx}(6;12) = 14 > 0$ d.h. (6;12) lok. Min

Lösung zu Aufgabe 2

a)
1. Definitionsbereich von $K(x) = D_K = [0\,;\,12]$
   $U(x) = p(x) \cdot x = 2{,}5x \;\; ; x \in [3{,}5\,;\,12]$
   $G(x) = U(x) - K(x) = -8x^2 + 152x - 710 \;\; ; x \in [3{,}5\,;\,12]$
2. Notwendige Bedingung:
   $0 = G'(x) = -16x + 152 \Leftrightarrow x = 9{,}5$
   Hinreichende Bedingung:
   $G''(x) = -16 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 9{,}5$ glob. Max.
   $G(9{,}5) = 12$ GE
   d.h. werden 9,5 ME produziert und abgesetzt, so wird der maximale Gewinn von 12 000 Euro erzielt.

b) NB: $3x = 12y \Leftrightarrow 3x - 12y = 0$
$L(x,y,\lambda) = 0{,}5x^2 + 8y^2 - 24x - 32y + 400 + \lambda(3x - 12y)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) & = & x - 24 + 3\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 1 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 16y - 32 - 12\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 16 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 3x - 12y & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 0 & = & x - 24 + 3\lambda & \\
\text{II} & 0 & = & 16y - 32 - 12\lambda & \\
\text{III} & 0 & = & 3x - 12y & \Rightarrow x = 4y \\
\hline
4 \cdot \text{I} + \text{II} & 0 & = & 4x + 16y - 128 & = 16y + 16y - 128 \Leftrightarrow y = 4
\end{array}$$

$x = 4 \cdot 4 = 16$

Der Wert von $\lambda_0 = \frac{8}{3}$ wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; \frac{8}{3}) = 1 \cdot 16 - 0^2 = 16 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x; y; \frac{8}{3}) = 1 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $K(x, y)$ hat in $(16\,; 4)$ ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

d.h. das Kosten-minimale Produktionsprogramm lautet 16 ME von Produkt A und 4 ME von Produkt B.

Lösung zu Aufgabe 3

v_1 = Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
v_2 = Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3 = Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE

a) 1. Kostengleichgewicht

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & (80 + 50 + 70)v_1 - v_2 - 3v_3 & = & 315 \\
\text{II} & (1 + 3 + 4)v_2 - 80v_1 - 4v_3 & = & 240 \\
\text{III} & (3 + 4 + 43)v_3 - 50v_1 - 3v_2 & = & 235
\end{array}$$

2. Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3	Primärkosten	Operation
1	200	−1	−3	315	
2	−80	8	−4	240	
3	$\boxed{-50}$	−3	50	235	
4	−50	−3	50	235	3
5	0	$\boxed{-13}$	197	1 255	1+4 · 3
6	0	64	−420	−680	5 · 2−8 · 3
7	−50	−3	50	235	4
8	0	−13	197	1 255	5
9	0	0	7 148	71 480	13 · 6+64 · 5

9 $7\,148v_3 = 71\,480 \Leftrightarrow v_3 = 10$

8 $-13v_2 + 1\,970 = 1\,255 \Leftrightarrow v_2 = 55$

9 $-50v_1 - 165 + 500 = 235 \Leftrightarrow v_1 = 2$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 55 \\ 10 \end{pmatrix} \}$$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 2 GE, in K_2 genau 55 GE und in K_3 genau 10 GE b)

Lieferant	Empfänger K_1	K_2	K_3	Hauptkosten-stellen	Primärkosten (in TEUR)
K_1	20	80	50	70	346
K_2	1	1	3	4	270
K_3	3	4	2	43	244

Kostengleichgewicht

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 346 & = & (80+50+70+20)v_1 - 20v_1 - v_2 - 3v_3 & = 200v_1 - 1v_2 - 3v_3 \\ \text{II} & 270 & = & (1+3+4+1)v_2 - 1v_2 - 80v_1 - 4v_3 & = 8v_2 - 80v_1 - 4v_3 \\ \text{III} & 244 & = & (3+4+43+2)v_3 - 2v_3 - 50v_1 - 3v_2 & = 50v_3 - 50v_1 - 3v_2 \end{array}$$

d.h. im Gleichungssystem haben sich gegenüber Teilaufgabe a) lediglich die Werte der Primärkosten verändert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 5000 + 300(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}121) \cdot \frac{1{,}121^3 - 1}{0{,}121} \cdot \frac{1}{1{,}121^3} + \frac{4200}{1{,}121^3} = 17\,178{,}98$
d.h. der Barwert des Modells A beträgt 17 178,98 Euro.

b) $K_0 = 3000 + 750(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}121) \cdot \frac{1{,}121^4 - 1}{0{,}121} \cdot \frac{1}{1{,}121^4} + \frac{8000}{1{,}121^4} = 17\,846{,}57$
d.h. der Barwert des Modells B beträgt 17 846,57 Euro.

c) Der Barwert des Modells A ist kleiner als der Barwert von Modell B. Somit ist Modell A für den Interessenten vorteilhafter.

d) $8000 = r_J \cdot \frac{1{,}018^4 - 1}{0{,}018} \Rightarrow r_J = 1\,946{,}80$
$1\,946{,}80 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}018) \Rightarrow r_M = 160{,}91$
d.h. der Interessent muss monatlich 160,91 Euro nachschüssig einzuzahlen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $r_J = 600 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}042) = 7\,338{,}60$
$K_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}042^{10} - 7\,338{,}60 \cdot \frac{1{,}042^{10} - 1}{0{,}042} = 61\,966{,}28$
d.h. die Restschuld nach 10 Jahren beträgt 61 966,28 €.

b) $r_J = 600 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0367) = 7\,321{,}11$
$K_5 = 100\,000 \cdot 1{,}0367^5 - 7\,321{,}11 \cdot \frac{1{,}0367^5 - 1}{0{,}0367} = 80\,354{,}41$
d.h. die Restschuld nach fünf Jahren beträgt 80 354,41 €.

c) $100\,000 = r_j \cdot \frac{1{,}042^{10} - 1}{0{,}042} \cdot \frac{1}{1{,}042^{10}} \Rightarrow r_J = 12\,452{,}15$
$12\,452{,}15 = r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}042) \Rightarrow r_M = 1\,018{,}08$
d.h. die Monatsrente beträgt 1 018,08 €

Lösung zu Aufgabe 6:

a)

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuität a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
4	8 600	-	8 600	200 000
20	2 580	10 000	12 580	50 000

$T = \dfrac{200\,000}{20} = 10\,000$
$K_{19} = 200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$
$Z_{20} = K_{19} \cdot 0{,}043 = 2\,580$
$K_{20} = K_{19} - 10\,000 = 50\,000$

b) 2019 = 5. Tilgungsjahr
Restschuld am 31.12.2019: $K_{10} = 200\,000 - 5 \cdot 10\,000 = 150\,000$

$$\begin{array}{r} 150\,000 \\ -30\,000 \\ \hline 120\,000 \end{array}$$

1. $T = \dfrac{120\,000}{15} = 8\,000$
   d.h. die Tilgungsbeträge ab dem Jahr 2020 betragen 8 000 Euro.
2. $120\,000 \cdot 0{,}043 + 8\,000 = 5\,160 + 8\,000 = 13\,160$
   d.h. die gesuchte Annuität beträgt 13 160 Euro.
3. 2020,2022,2024 . . . , 2034 = 8 Tilgungsjahre
   $T = \dfrac{120\,000}{8} = 15\,000$
   d.h. die Tilgung beträgt 15 000 Euro.

Mathematik-Klausur vom 09.02.2010 und Finanzmathematik-Klausur vom 02.02.2010

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+4x-32}{6x-24}$

b) Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ eines Unternehmens mit

$$K(x) = e^x \cdot 5x \quad ; x \geq 0$$

Die produzierte Menge x kann am Markt gemäß der folgenden linearen Preis-Absatz Funktion abgesetzt werden:

$$p(x) = 904{,}71 - 0{,}5x \quad ; x \in [0\,;\,1\,809{,}42]$$

1. Erstellen Sie die Gewinnfunktion.
2. Geben Sie die erste Ableitung der Kostenfunktion an.
3. Wie hoch sind die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 3$?
4. Was besagen die Grenzkosten an dieser Stelle?

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 5x^2 \quad ; x > 0$$

$$h(x) = \frac{x}{\ln x} \quad ; x > 0$$

Aufgabe 2

Aus den drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden die drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Der Rohstoffbedarf (in ME) für jeweils eine ME der Endprodukte ist wie folgt:

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	3
R_2	3	3	1
R_3	5	4	1

Im Lager befinden sich 29 ME von R_1, 22 ME von R_2 und 30 ME von R_3. Um zu bestimmen, wie viele ME der Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, gehen Sie wie folgt vor:

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf.

b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

c) Die Rohstoffe können für 30 GE pro ME von R_1, 20 GE pro ME von R_2 und 10 GE pro ME von R_3 eingekauft werden. Wie hoch sind die Rohmaterialkosten pro ME der Endprodukte?

Aufgabe 3

Ein Unternehmen fertigt die beiden Produkte S und T. Die Gewinnfunktion in Abhängigkeit der Mengen x und y lautet:

$$G(x;y) = -2x^3 - y^2 + 12xy - 700 \ ; x, y \geq 7$$

Dabei stellen x die Produktionsmenge von Gut S (in tausend Stück) und y die Produktionsmenge von Gut T (in tausend Stück) dar.

a) Bestimmen Sie das Gewinn-maximale Produktionsprogramm in Stück.

b) Wie hoch ist der maximale Gewinn in Geldeinheiten?

c) Durch den längerfristigen Ausfall einer Maschine hat sich die Gewinnfunktion geändert und lautet nunmehr wie folgt:

$$G(x;y) = -\frac{1}{4}x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 \ ; x, y, \geq 0$$

Gleichzeitig muss durch den Ausfall der Maschine die Produktionsrestriktion 2x=8y eingehalten werden.

Wie lautet nunmehr das Gewinn-maximale Produktionsprogramm unter Einhaltung der Produktionsrestriktion. Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Aufgabe 4

Eine Person spart vier Jahre monatlich nachschüssig 400 EUR auf einem Konto an. Die Bank gewährt einen Jahreszins von 3,8%.

a) Welchen Betrag hat die Person nach vier Jahren auf ihrem Konto?

b) Welchen Betrag kann die Person fünf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) montalich vorschüssig von dem Konto abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

c) Welchen Betrag kann die Person fünf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschüssig von dem Konto abheben, wenn sie zusätzlich zwei Jahre nach Ende der Ansparphase 5 000 EUR für eine Sonderanschaffung abhebt? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

d) Wie lange kann die Person (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschüssig 606,06 EUR abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

Aufgabe 5

Für einen Hauskauf wird am 31.12.2010 ein Kredit in Höhe von 180 000 Euro zu einem Jahreszins von 4,2% aufgenommen. In den Jahren 2011, 2012, 2013 und 2014 werden lediglich die anfallenenden Zinsen bezahlt. Für die Rückzahlung stehen zwei Modelle zur Verfügung:

a) 1. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit einer Ratentilgung über 15 Jahre zurückgezahlt. Berechnen Sie den jährlichen Tilgungsbetrag am Ende des Jahres 2015.

b) 2. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit nachschüssigen Prozentannuitäten in Höhe von 10% der aufgenommenen Schuld zurückgezahlt.

   1. Berechnen Sie die Prozentannuität.
   2. Wie viele volle Prozentannuitäten sind zu leisten?
   3. Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?
   4. Berechnen Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuität, Restschuld) für das Jahr 2024.

Aufgabe 6

Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €
Verzinsung: jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins
Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.

Zinskonditionen:	1. Jahr:	5% p.a.
	2. bis 5. Jahr:	6% p.a.
	6. bis 10. Jahr:	7% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende welchen Jahres übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 165 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinsssatz führt nach zehn Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?

d) Das Unternehmen möchte das Angebot annehmen. Es besteht jedoch auf einer Änderung der Zinssätze im ersten und zehnten Jahr. Wie hoch sind diese beiden Zinssätze, wenn der in a) berechnete Betrag ausgegezahlt werden soll und der Zinssatz im zehnten Jahr doppelt so hoch sein soll wie im ersten Jahr?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+4x-32}{6x-24} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+8)}{6(x-4)} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+8}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

b1) $G(x) = 904{,}71x - 0{,}5x^2 - e^x \cdot 5x$

b2) $K'(x) = e^x \cdot 5x + 5e^x = 5e^x(x+1)$

b3) $K'(3) = 5e^3 \cdot 4 = 20e^3 = 401{,}7107$
d.h. die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 3$ betragen etwa 401,7 GE.

b4) Werden statt 3 ME jetzt 4 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 401,7 GE.

c) $f'(x) = \left(x^{4/3} + 5x^2\right)' = \frac{4}{3}x^{1/3} + 10x$
$h'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Lösung zu Aufgabe 2:
e_1=ME von E_1 und e_2 = ME von E_2 und e_3=ME von E_3

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2e_1 + e_2 + 3_3 & = & 29 \\ \text{II} & 3e_1 + 3e_2 + e_3 & = & 22 \\ \text{III} & 5e_1 + 4e_2 + e_3 & = & 30 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	$\boxed{2}$	1	3	29	
2	3	3	1	22	
3	5	4	1	30	
4	2	1	3	29	1
5	0	$\boxed{3}$	-7	-43	$2 \cdot$ 2 $- 3 \cdot$ 1
6	0	3	-13	-85	$2 \cdot$ 3 $- 5 \cdot$ 1
7	2	1	3	29	4
8	0	3	-7	-43	5
9	0	0	-6	-42	6 $-$ 5

9 $-6e_3 = -42 \Rightarrow e_3 = 7$
8 $3e_2 - 7 \cdot 7 = -43 \Rightarrow 3e_2 = 6 \Rightarrow e_2 = 2$
7 $2e_1 + 2 + 3 \cdot 7 = 29 \Rightarrow 2e_1 = 6 \Rightarrow e_1 = 3$
d.h. aus dem Vorrat können 3 ME von E_1, 2 ME von E_2 und 7 ME von E_3 hergestellt werden.

c) *1. Lösungsweg:*

	E_1	E_2	E_3
R_1	$2 \cdot 30$	$1 \cdot 30$	$3 \cdot 30$
R_2	$3 \cdot 20$	$3 \cdot 20$	$1 \cdot 20$
R_3	$5 \cdot 10$	$4 \cdot 10$	$1 \cdot 10$
	$\sum = 170$	$\sum = 130$	$\sum = 120$

2. Lösungsweg:
$$(30, 20, 10) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (170, 130, 120)$$

d.h. an Rohmaterial kosten eine ME von E_1 genau 170 GE, eine ME von E_2 genau 130 GE und eine ME von R_3 genau 120 GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $G_x(x,y) = -6x^2 + 12y \quad G_{xx}(x,y) = -12x$
$G_y(x,y) = -2y + 12x \quad G_{yy}(x,y) = -2$
$G_{xy}(x,y) = 12$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lcll} \text{I} & 0 & = & -6x^2 + 12y \\ \text{II} & 0 & = & -2y + 12x \\ \hline \text{I} + 6 \cdot \text{II} & 0 & = & -6x^2 + 72x = -6x(x-12) \Leftrightarrow x = 12 \text{ oder } \underbrace{x = 0}_{\notin \text{Def.bereich}} \\ \text{II} & 0 & = & -2y + 144 \Leftrightarrow y = 72 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y) = (-12x) \cdot (-2) - 12^2 = 24x - 144 \geq_{\text{da } x \geq 7} 24 \cdot 7 - 144 = 24 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x;y) = -12x <_{\text{immer}} 0$; da $x \geq 7$ d.h. (12;72) glob. Max.

d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x = 12$ ME und $y = 72$ ME.

b) $G(12;72) = 1\,028$ d.h. der maximale Gewinn beträgt 1 028 GE.

c) NB: $2x = 8y \Leftrightarrow 2x - 8y = 0$

$L(x,y,\lambda) = -0{,}25x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 + \lambda(2x - 8y)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) & = & -0{,}5x + 12 + 2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -0{,}5 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & -8y + 16 - 8\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -8 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 2x - 8y & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lcll} \text{I} & 0 & = & -0{,}5x + 12 + 2\lambda \\ \text{II} & 0 & = & -8y + 16 - 8\lambda \\ \text{III} & 0 & = & 2x - 8y \qquad \Rightarrow x = 4y \\ \hline 4 \cdot \text{I} + \text{II} & 0 & = & -2x - 8y + 64 \qquad = -8y - 8y + 64 = -16y + 64 \Leftrightarrow y = 4 \end{array}$$

$x = 4 \cdot 4 = 16$

Der Wert von $\lambda_0 = -2$ wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;-2) = (-0{,}5) \cdot (-8) - 0^2 = 4 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x;y;-2) = -0{,}5 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x,y)$ hat in $(16\,;4)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $r_J = 400\,(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}038) = 4\,883{,}60$

$$R_4 = 4\,833{,}60 \cdot \frac{1{,}038^4 - 1}{0{,}038} = 20\,676{,}34$$

d.h. das Guthaben beträgt 20 676,34 EUR.

b) $$20\,676{,}34 = r_J \cdot \frac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \frac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 4\,618{,}403$$

$4\,618{,}403 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 377{,}1048$
d.h. die Monatsrente beträgt 377,10 EUR.

c) $20\,676{,}34 - \dfrac{5\,000}{1{,}038^2} = 16\,035{,}73$

$16\,035{,}73 = r_J \cdot \dfrac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 3\,581{,}846$

$3\,581{,}846 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 292{,}4672$
d.h. die Monatsrente beträgt 292,47 EUR.

d) $r_J = 606{,}06(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) = 7\,422{,}417$

$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{20\,676{,}34}{7\,422{,}417} \cdot 0{,}038\right]}{\ln 1{,}038} = 3{,}013977$

d.h. drei Jahre lang kann die Monatsrente abgehoben werden.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $T = \dfrac{180\,000}{15} = 12\,000$

b) 1. $A = K_0 \cdot (i + t) = 180\,000 \cdot 0{,}10 = 18\,000$

2. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{180\,000}{18\,000} \cdot 0{,}042\right]}{\ln 1{,}042} = 13{,}24019$

d.h. es sind dreizehn volle Prozentannuitäten zu leisten.

3. $K_{13} = 180\,000 \cdot 1{,}042^{13} - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^{13} - 1}{0{,}042} = 4\,214{,}248$

$4\,214{,}248 \cdot 1,042 = 4\,391{,}25$
d.h. die Restschuld beträgt 4 391,25 Euro.

4. $K_9 = 180\,000 \cdot 1{,}042^9 - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^9 - 1}{0{,}042} = 68\,606{,}10$

$Z_{10} = K_9 \cdot i = 2\,881{,}46$
$T_{10} = A - Z_{10} = 15\,118{,}54$
$K_{10} = K_9 - T_{10} = 53\,487{,}55$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $K_1 = \dfrac{100\,000}{0{,}95} = 105\,263{,}16$

$K_5 = \dfrac{105\,263{,}16}{0{,}94^4} = 134\,823{,}31$

$K_{10} = \dfrac{134\,823{,}31}{0{,}93^5} = 193\,798{,}42$

d.h. der Betrag liegt bei 193 798,42 Euro.

2. Lösungsweg:

$K_{10} = \dfrac{100\,000}{0{,}95 \cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^5} = 193\,798{,}42$

b) nachschüssiger Ersatzzins $i' = \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{0{,}07}{0{,}93} = 0{,}07526882$

$n = \dfrac{\ln\left(\frac{165\,000}{134\,823{,}31}\right)}{\ln 1{,}07526882} = 2{,}783222 \Rightarrow 5 + 2{,}783222 = 7{,}783222$

d.h. nach acht Jahren.

c) $q = \sqrt[10]{\dfrac{193\,798{,}42}{100\,000}} = 1{,}068403$

d.h. der gesuchte Zins beträgt etwa 6,84%.

d)
$$\begin{aligned}
\frac{100\,000}{(1-i)\cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^4 \cdot (1-2i)} &= 193\,798{,}42 && \\
\frac{100\,000}{0{,}5840408 \cdot (1-i)(1-2i)} &= 193\,798{,}42 && \Big|\cdot \frac{(1-i)(1-2i)}{193\,798{,}42} \\
0{,}8835 &= (1-i)(1-2i) = 1 - 3i + 2i^2 && \mid \div 2 \\
0{,}44175 &= i^2 - 1{,}5i + 0{,}5 && \mid -0{,}44175 \\
0 &= i^2 - 1{,}5i + 0{,}05825 && \mid \text{pq-Formel} \\
i &= 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 - 0{,}05825} = 0{,}75 \pm 0{,}7101056 && \\
i &= 0{,}03989437 \text{ oder } i = 1{,}460106 &&
\end{aligned}$$

d.h der Zins für das erste Jahr beträgt 3,989% und für das zehnte Jahr $2 \cdot 3{,}989 = 7{,}978\%$.