Mathematik-Klausur vom 08.02.2012
Finanzmathematik-Klausur vom 01.02.2012

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Es bezeichnen x die Absatzmenge eines Gutes und p den Verkaufspreis (in GE) des Gutes pro ME. Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p = 12$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:
$$x(p) = 120 - 6p \ \ ; p \in [0; 20]$$

b) Bestimmen Sie die Sattelstelle der folgenden Funktion:
$$f(x, y) = -6x^2 + 6y^2 + 136x - 20xy + 100 \ \ ; x, y \in \mathbb{R}$$

c) A, B, C seien 3×3-Matrizen und E sei die 3×3 Einheitsmatrix. Bitte reduzieren Sie in den nachfolgenden Termen die Anzahl der Matrizenmultiplikationen auf genau eine Matrizenmultiplikation, falls dies möglich ist:

1. $(A - 3B)C + 2BC$
2. $2(A - 3B)C + 2CB$
3. $AE - 2EA$

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 her. Der Rohstoffbedarf (in ME) für jeweils eine ME der Endprodukte ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

	E_1	E_2	E_3
R_1	3	2	4
R_2	4	4	1
R_3	2	2	3

Im Lager befindet sich der folgende Vorrat (in ME) der Rohstoffe:

R_1	R_2	R_3
51	43	39

Bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte sich aus diesem Vorrat herstellen lassen, indem Sie die folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

b) Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus. Welches Produktionsprogramm lässt sich folglich aus dem Vorrat herstellen?

c) Berechnen Sie weiterhin die Rohstoffkosten pro ME der Endprodukte, wenn im Einkauf derzeit 20 GE für eine ME von R_1, 10 GE für eine ME von R_2 und 20 GE für eine ME von R_3 gezahlt werden müssen.

Aufgabe 3

Ein Unternehmen stellt zwei Güter A und B her. Die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Mengen x des Guts A und y des Guts B lautet:

$$K(x;y) = 2x + 4y + 10 \quad ; x, y > 0$$

Die Verkaufspreise der Güter betragen 6 GE für eine ME von Gut A und 5 GE für eine ME von Gut B.

a) Wie hoch ist der maximale Gewinn, wenn die Produktionsrestriktion $2x^2 + y^2 = 36$ eingehalten werden muss?

b) Für welche Mengenkombination von Gut A und Gut B sind die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_x(x;y) = K_x(x;y) \cdot \dfrac{x}{K(x;y)}$ und $\varepsilon_y(x;y) = K_y(x;y) \cdot \dfrac{y}{K(x;y)}$ gleich groß?

Aufgabe 4

Ein Darlehn in Höhe von 300 000 € wird von einer Bank zu folgenden Konditionen zur Verfügung gestellt:

Auszahlung:	100%
Kreditzins:	5% p.a.
Tilgung:	3% Tilgungssatz im ersten Jahr

Die Rückzahlung soll in gleich hohen Annuitäten erfolgen, erste Annuität fällig ein Jahr nach Kreditauszahlung.

a) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen?

b) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das siebte Tilgungsjahr an.

c) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Aufgabe 5

Der Autohändler A bietet bei 2,9 % Jahreszins für einen Ratenkauf eines VW Golf Plus das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung in Höhe von 1 600 Euro, fällig sofort

- vorschüssige Monatsraten in Höhe von 300 Euro über vier Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung

- Restzahlung (Schlussrate) nach vier Jahren in Höhe von 6 000 Euro

a) Wie hoch müsste der Verkaufspreis bei einem Barkauf mindestens sein, damit das Finanzierungsmodell günstiger wäre?

b) Der Autohändler B bietet für den gleichen Wagen ebenfalls bei 2,9 % Jahreszins das folgende Finanzierungsmodell an:

   - Anzahlung über 4 000 Euro
   - Quartalsraten über fünf Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
   - Restzahlung (Schlussrate) in Höhe von 5 000 Euro nach fünf Jahren.

   Wie hoch müssen die Quartalsraten bemessen sein, damit die Finanzierungsmodelle der beiden Händler gleichwertig sind; d.h. die selben Barwerte haben?

Aufgabe 6

Bei einer Geschäftsbank wurde am 31.03.2011 ein Kredit über 50 000 € zu einem nominellen Jahreszins von 3,1% bei vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins aufgenommen. Der Kredit soll am 31.12.2015 zurückgezahlt werden.

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins? (Geben Sie bitte den Effektivzins in Prozent mit vier Nachkommastellen an.)

b) Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag am 31.12.2015?

c) Nach wie vielen vollen Quartalen übersteigt die Schuld erstmals den Betrag von 55 000 €?

d) Angenommen vorzeitig werden 20 000 € am 31.03.2013 und 10 000 € am 31.12.2013 zurückgezahlt. Wie hoch ist dann die Restzahlung am 31.12.2015?

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x'(p) = -6$

   $\varepsilon_x(p) = (-6) \cdot \dfrac{p}{120 - 6p} \Rightarrow \varepsilon_x(12) = (-6) \cdot \dfrac{12}{48} = -1{,}5$

   d.h. wird der Preis von 12 GE um einen Prozent erhöht, so sinkt der Absatz um 1,5%.

b) $f_x(x, y) = -12x + 136 - 20y \quad f_{xx}(x, y) = -12$

   $f_y(x, y) = 12y - 20x \quad f_{yy}(x, y) = 12$

   $f_{xy}(x, y) = -20$

   Notwendige Bedingung:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{I} & 0 & = & -12x + 136 - 20y & \\
\text{II} & 0 & = & 12y - 20x & \\
\hline
3 \cdot \text{II} - 5 \cdot \text{I} & 0 & = & 136y - 680 & \Leftrightarrow y = 5 \\
\text{II} & 0 & = & 60 - 20x & \Leftrightarrow x = 3
\end{array}
$$

d.h. (3;5) ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(3;5) = (-12) \cdot 12 - (-20)^2 = -544 < 0$
d.h. (3;5) ist eine Sattelstelle

c) 1. $(A - 3B) \cdot C + 2B \cdot C = AC - 3BC + 2BC = AC - BC = (A - B)C$

2. $2(A - 3B) \cdot C + 2C \cdot B = 2AC - 6BC + 2CB$ lässt sich nicht auf eine Matrizenmultiplikation reduzieren

3. $A \cdot E - 2E \cdot A = A - 2A = -A = -E \cdot A = -A \cdot E$

Lösung zu Aufgabe 2
e_j bezeichne die Menge von Endprodukt E_j für $j = 1, 2, 3$.

a) Zugehöriges Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3e_1 + 2e_2 + 4e_3 = 51 \\ \text{II} & 4e_1 + 4e_2 + e_3 = 43 \\ \text{III} & 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 = 39 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	$\boxed{3}$	2	4	51	
2	4	4	1	43	
3	2	2	3	39	
4	3	2	4	51	
5	0	$\boxed{-4}$	13	75	$4 \cdot (1) - 3 \cdot (2)$
6	0	-2	-1	-15	$2 \cdot (1) - 3 \cdot (3)$
7	3	2	4	51	
8	0	-4	13	75	
9	0	0	15	105	$(5) - 2 \cdot (6)$

$$\begin{array}{ll} (9) & 15e_3 = 105 \Leftrightarrow e_3 = 7 \\ (8) & -4e_2 + 13 \cdot 7 = 75 \Leftrightarrow -4e_2 = -16 \Leftrightarrow e_2 = 4 \\ (7) & 3e_1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = 51 \Leftrightarrow 3e_1 = 15 \Leftrightarrow e_1 = 5 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

d.h. aus dem Vorrat können 5 ME von E_1, 4 ME von E_2 und 7 ME von E_3 hergestellt werden.

c) Bestimmung der Rohstoffkosten pro Endprodukt:

$$(20; 10; 20) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (140; 120; 150)$$

d.h. eine ME von E_1 kostet an Rohstoffen insgesamt 140 GE, eine ME von E_2 insgesamt 120 GE und eine ME von E_3 insgesamt 150 GE.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $G(x;y) = 6 \cdot x + 5 \cdot y - K(x;y) = 4x + y - 10 \ \ ; x,y > 0$

$L(x,y,\lambda) = 4x + y - 10 + \lambda(2x^2 + y^2 - 36)$

$$\begin{array}{rclrcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 4 + 4\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 4\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 1 + 2\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 2\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 2x^2 + y^2 - 36 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 4 + 4\lambda x \\ \text{II} & 0 & = & 1 + 2\lambda y \\ \text{III} & 0 & = & 2x^2 + y^2 - 36 \\ \hline y \cdot \text{I} - 2x \cdot \text{II} & 0 & = & 4y - 2x \Leftrightarrow x = 2y \\ \text{III} & 0 & = & 2(2y)^2 + y^2 - 36 = 9y^2 - 36 \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{y = -2}_{\notin \text{Def.bereich}} & & & \text{oder } y = 2 \Rightarrow x = 4 \\ \text{I} & 0 & = & 4 + 16\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;-0{,}25) = 8 \cdot (-0{,}25)^2 - 0 = 0{,}5 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x;y;\lambda_0) = 4 \cdot (-0{,}25) = -1 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x,y)$ hat in $(4\,;\,2)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

$G(4;2) = 18 - 10$

d.h. der maximale Gewinn beträgt unter Berücksichtigung der Produktionsrestriktion 8 GE.

b) $\varepsilon_x(x;y) = \varepsilon_y(x;y) \Leftrightarrow K_x(x;y) \cdot \dfrac{x}{K(x;y)} = K_y(x;y) \cdot \dfrac{y}{K(x;y)}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{x}{2x + 4y + 10} = 4 \cdot \dfrac{y}{2x + 4y + 10} \Leftrightarrow 2x = 4y \Leftrightarrow x = 2y$

d.h. die ME von Gut A müssen das Doppelte der ME von Gut B betragen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $A = 300\,000 \cdot (0{,}05 + 0{,}03) = 24\,000$

$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{300\,000}{24\,000} \cdot 0{,}05]}{\ln 1{,}05} = 20{,}1$$

d.h. es sind 20 volle Annuitäten zu zahlen.

b) $K_6 = 300\,000 \cdot 1{,}05^6 - 24\,000 \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 238\,782{,}78$

$Z_7 = K_6 \cdot 0{,}05 = 11\,939{,}14$

$T_7 = A - Z_7 = 12\,060{,}86$

$K_7 = K_6 - T_7 = 226\,721{,}92$

c) $K_{20} = 300\,000 \cdot 1{,}05^{20} - 24\,000 \cdot \dfrac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = 2\,406{,}41$

$K_{20} \cdot 1{,}05 = 2\,526{,}73$
d.h. die Restschuld beträgt 2 526,73 €.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $r_J = 300(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}029) = 3\,656{,}55$
$R_0 = 3\,656{,}55 \cdot \dfrac{1{,}029^4 - 1}{0{,}029} \cdot \dfrac{1}{1{,}029^4} = 13\,624{,}32$
$K_0 = 1\,600 + 13\,624{,}32 + \dfrac{6\,000}{1{,}029^4} = 20\,576{,}00$
d.h. der Verkaufspreis müsste über 20 576 Euro liegen, damit das Finanzierungsmodell günstiger wäre.

b) $R_0 = 20\,576 - 4\,000 - \dfrac{5\,000}{1{,}029^5} = 12\,241{,}96$
$12\,241{,}96 = r_J \cdot \dfrac{1{,}029^5 - 1}{0{,}029} \cdot \dfrac{1}{1{,}029^5} \Leftrightarrow r_J = 2\,665{,}46$
$2\,665{,}46 = r'_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}029) \Leftrightarrow r'_Q = 654{,}50$
d.h. die Quartalsraten müssen 654,50 Euro betragen.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $j = \left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}031362$
d.h. der effektive Jahreszins beträgt 3,1362%.

b) Laufzeit:

2011	3 Quartale
2012	4 Quartale
2013	4 Quartale
2014	4 Quartale
2015	4 Quartale
$\sum$	19 Quartale = 4,75 Jahre

$K_{4{,}75} = 50\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^{4 \cdot 4{,}75} = 57\,899{,}30$
d.h. es sind 57 899,30 € zurückzuzahlen.

c) $n = \dfrac{\ln(55\,000 \div 50\,000)}{\ln 1{,}031362} = 3{,}086420$
d.h. nach dreizehn vollen Quartalen wird erstmals der Betrag von 55 000 € überschritten.

d) Die Rückzahlung über 20 000 € wird elf Quartale vor der Restzahlung und die Rückzahlung über 10 000 € wird acht Quartale vor der Restzahlung getätigt.
$57\,899{,}30 - 20\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^{11} - 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^{8} = 25\,489{,}59$
d.h. er muss 25 489,59 € zurückzahlen.