

Mathematik-Klausur vom 08.07.2011 und Finanzmathematik-Klausur vom 14.07.2011

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

- a) Berechnen von der folgenden Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 60 - 5p; \quad p \in [0; 12]$$

die Umkehrfunktion $p(x)$ sowie den Definitionsbereich von $p(x)$.

- b) Die nachfolgende Kostenfunktion gibt die Kosten (in GE) in Abhängigkeit der hergestellten ME x an:

$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 5000; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Berechnen und interpretieren Sie Grenzkosten an der Stelle $x = 5$ ME.

- c) Bestimmen Sie die Sattelstelle der folgenden Funktion:

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 2y; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

- a) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie:

- $A \cdot B$
 - $A \cdot C - 3 \cdot D$
- b) Betrachtet werden im Rahmen der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung die drei Hilfskostenstellen K_1 , K_2 und K_3 , die ihre Leistungen an verschiedene Hauptkostenstellen abgeben, sich aber auch wechselseitig mit Leistungen beliefern.

Die Leistungsabgaben an die Hauptkostenstellen, die gegenseitigen Leistungsabgaben zwischen den Hilfskostenstellen und die in den Hilfskostenstellen anfallenden Primärkosten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Lieferant	Empfänger				Leistungseinheit (LE)	Primärkosten (in TEUR)
	K_1	K_2	K_3	Hauptkostenstellen		
K_1	0	12	10	38	Stück	545
K_2	8	0	2	8	Tonnen	39
K_3	21	15	0	21	Liter	1 615

Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.
2. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie das globale (absolute) Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 100; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 10$ mittels der Lagrange-Methode.

Aufgabe 4

Herr E. möchte seine Rente, die ihm durch vierzehn vorschüssige Jahresbeträge von 17 200 € zukommen soll, in eine nachschüssige Jahresrente über elf Jahre umwandeln. Die Zinsen betragen 5% p.a.

- a) Wie hoch ist der Barwert der 14-jährigen vorschüssigen Rente?
- b) Wie hoch sind die neuen Jahresauszahlungen?
- c) Wie hoch wären monatlich vorschüssig ausgezahlte Beträge über diese elf Jahre?
- d) Welchen Betrag könnte Herr E. sofort abheben, wenn die zu Beginn eines jeden Monats fälligen Beträge über diese elf Jahre nur 1 600 € betragen sollen?

Aufgabe 5

Für den Kauf eines Kleinwagens besteht zu 4% Zinsen p.a. das folgende Finanzierungsmodell

- Sofortzahlung von 8 000 €
 - vorschüssige Quartalsraten in Höhe von 250 € über drei Jahre, erste Rate sofort fällig
 - Restzahlung in Höhe von 3 000 € nach Ablauf von drei Jahren
- a) Wie hoch muss bei 4% Zinsen p.a. der Kaufpreis des Wagens sein, damit das Finanzierungsmodell günstiger ist als der Barkauf?
 - b) Wie hoch wären statt der Quartalsraten vorschüssige Monatsraten zu 4% Jahreszins über drei Jahre?

- c) Der Käufer entscheidet sich für das Finanzierungsmodell. Unvorhergesehen möchte der Käufer zu Beginn des dritten Jahres nach Erwerb des Pkw seine noch ausstehenden Schulden mit einer Einmalzahlung vorzeitig zurückzahlen. Wie hoch ist diese Zahlung zu Beginn des dritten Jahres, wenn die Zinsen weiterhin 4% p.a. betragen?

Aufgabe 6

Ein Bauherr finanziert einen Teil einer neuen Immobilie - im Folgenden Immobilie 1 genannt - mit einem Kredit, der mit dem Verkaufserlös einer anderen Immobilie - im Folgenden Immobilie 2 genannt - getilgt werden soll. Da er zum Zeitpunkt des Kaufs der Immobilie 1 noch nicht weiß, wann die Immobilie 2 verkauft werden wird, vereinbart er mit seiner Bank einen Kredit mit einer maximalen Laufzeit von einem Jahr und einem flexiblen Zinssatz, der je nach Entwicklung der Kapitalmärkte jeden Monat angepasst werden muss. Die Zinsen werden monatlich nachschüssig an die Bank gezahlt. Zusammengefasst ergibt sich:

Auszahlung der Kreditsumme: 01.06.2011

Auszahlungsbetrag: 100 000 €

Anfänglicher Zinssatz: 4,32 % p.a.

Zinszahlung: monatlich nachschüssig

Tilgung: Bei Verkauf der Immobilie 1, spätestens am 31.05.2012

- a) Wie hoch sind die monatlichen Zinszahlungen, wenn sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 nicht ändert und der Kredit erst am 31.05.2012 getilgt wird? Wie hoch ist dann die Summe aller Zinszahlungen?
- b) Wie hoch ist die Summe aller Zinszahlungen, wenn sich der flexible Zinssatz zum 01.01.2012 auf 4,56% p.a. und zum 01.04.2012 auf 4,92% p.a. erhöht und der Kredit erst am 31.05.2012 getilgt wird?

Der Bauherr erhält für die Immobilie 2 am 01.12.2011 die folgenden beiden Angebote:

Angebot 1:

Verkauf der Immobilie und Zahlung des Kaufpreises: 31.01.2012

Kaufpreis: 100 000 €

Angebot 2:

Verkauf der Immobilie und Zahlung des Kaufpreises: 31.05.2012

Kaufpreis: 101 500 €

Somit könnte der Bauherr bei Annahme von Angebot 1 den Kredit zum 31.01.2012 und bei Annahme von Angebot 2 zum 31.05.2012 tilgen.

- c) Für welches Angebot sollte sich der Bauherr entscheiden, wenn er davon ausgeht, dass sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 nicht ändert? Nehmen Sie dazu an, dass bei Annahme von Angebot 1 die im Zeitraum 01.02.2012 bis 31.05.2012 gesparten Zinszahlungen an die Bank zu einem Jahreszins von 2% angelegt werden können.

- d) Für welches Angebot sollte sich der Bauherr entscheiden, wenn er davon ausgeht, dass sich der flexible Zinssatz im Zeitraum 01.06.2011 bis 31.05.2012 gemäß Aufgabenteil b) verändert? Nehmen Sie dazu an, dass bei Annahme von Angebot 1 die im Zeitraum 01.02.2012 bis 31.05.2012 gesparten Zinszahlungen an die Bank zu einem Jahreszins von 2% angelegt werden können.

Lösung zu Aufgabe 1

- a) $x = 60 - 5p \Leftrightarrow 5p = 60 - x \Leftrightarrow p = 12 - 0,2x$
d.h. $p(x) = 12 - 0,2x$; $x \in [0; 60]$
- b) $K'(x) = 3x^2 - 60x + 300$ und $K'(5) = 75$
d.h. werden statt 5 ME jetzt 6 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 75 GE.
- c) $f_x(x, y) = -2x$ $f_{xx}(x, y) = -2$
 $f_y(x, y) = 2y - 2$ $f_{yy}(x, y) = 2$
 $f_{xy}(x, y) = 0$

Notwendige Bedingung:

I $0 = -2x \Leftrightarrow x = 0$

II $0 = 2y - 2 \Leftrightarrow y = 1$

d.h. (0;1) ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(0, 1) = (-2) \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$

d.h. (0;1) Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2

a) 1. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 80 & 65 \\ 104 & 67 \\ 116 & 93 \end{bmatrix}$

2. $A \cdot C - 3 \cdot D = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$

- b) 1. $v_1 =$ Bewertung in TEUR für ein in K_1 hergestelltes Stück
 $v_2 =$ Bewertung in TEUR für eine in K_2 hergestellte Tonne
 $v_3 =$ Bewertung in TEUR für einen in K_3 hergestellten Liter
Kostengleichgewicht:
I $(12 + 10 + 38)v_1 - 8v_2 - 21v_3 = 545$
II $(8 + 2 + 8)v_2 - 12v_1 - 15v_3 = 39$
III $(21 + 15 + 21)v_3 - 10v_1 - 2v_2 = 1615$
2. Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3	r	Operation
①	60	-8	-21	545	
②	-12	18	-15	39	
③	-10	-2	57	1 615	
④	60	-8	-21	545	①
⑤	0	82	-96	740	$5 \cdot \textcircled{2} + \textcircled{1}$
⑥	0	-20	321	10 235	$6 \cdot \textcircled{3} + \textcircled{1}$
⑦	60	-8	-21	545	④
⑧	0	82	-96	740	⑤
⑨	0	0	12 201	427 035	$41 \cdot \textcircled{6} + 10 \cdot \textcircled{5}$

$$\textcircled{9} \quad 12\,201v_3 = 427\,035 \Leftrightarrow v_3 = 35$$

$$\textcircled{8} \quad 82v_2 - 3\,360 = 740 \Leftrightarrow v_2 = 50$$

$$\textcircled{7} \quad 60v_1 - 400 - 735 = 545 \Leftrightarrow v_1 = 28$$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 28 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix} \right\}$$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 28 TEUR, in K_2 genau 50 TEUR und in K_3 genau 35 TEUR.

Lösung zu Aufgabe 3

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 100 + \lambda(x + y - 10)$$

$$L_x(x, y, \lambda) = 2x + y + 1 + \lambda \quad L_{xx}(x, y, \lambda) = 2$$

$$L_y(x, y, \lambda) = 2y + x + 1 + \lambda \quad L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10 \quad L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$$

Notwendige Bedingung:

$$\text{I} \quad 0 = 2x + y + 1 + \lambda$$

$$\text{II} \quad 0 = 2y + x + 1 + \lambda$$

$$\text{III} \quad 0 = x + y - 10$$

$$\text{I} - \text{II} \quad 0 = x - y \quad \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{III} \quad 0 = x + x - 10 \quad \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$$D(x, y; \lambda_0) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 >_{\text{immer}} 0$$

$$L_{xx}(x, y; \lambda_0) = 2 >_{\text{immer}} 0$$

d.h. $f(x, y)$ hat in $(5; 5)$ ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4

$$\text{a) } R_0 = 17\,200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{14} - 1}{0,05} \cdot \frac{1}{1,05^{14}} = 178\,769,46$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 178\,769,46 &= r_J \cdot \frac{1,05^{11}-1}{0,05} \cdot \frac{1}{1,05^{11}} \\ 178\,769,46 &= r_J \cdot 8,3064 \\ r_J &= 21\,521,86 \end{aligned}$$

$$\text{c) } 21\,521,86 = r'_M (12 + 6,5 \cdot 0,05) = 12,325 r'_M \Rightarrow r'_M = 1\,746,20$$

$$\begin{aligned} \text{d) } r_J &= 1\,600(12 + 6,5 \cdot 0,05) = 19\,720 \\ R_0 &= 19\,720 \cdot \frac{1,05^{11}-1}{0,05} \cdot \frac{1}{1,05^{11}} = 163\,802,49 \\ &178\,769,46 \\ &\underline{-163\,802,49} \\ &14\,966,97 \end{aligned}$$

d.h. Herr E. könnte sofort 14 966,97 € von seinem Konto abheben.

Lösung zu Aufgabe 5:

$$r_J = 250 \cdot (4 + 2,5 \cdot 0,04) = 1\,025$$

$$\text{a) } K_0 = 8\,000 + 1\,025 \cdot \frac{1,04^3 - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{104^3} + \frac{3\,000}{1,04^3} = 13\,511,46$$

d.h. der Kaufpreis muss mindestens 13 511,47 € betragen.

$$\text{b) } 1\,025 = r'_M (12 + 6,5 \cdot 0,04) \Leftrightarrow r'_M = 83,60522$$

d.h. die Monatsraten müssten 83,61 € betragen.

$$\text{c) } \frac{1\,025}{1,04} + \frac{3\,000}{1,04} = 3\,870,19$$

d.h. der Käufer muss 3 870,19 € bezahlen, um den Vertrag ein Jahr früher zu beenden.

Lösung zu Aufgabe 6:

$$\text{a) } \text{Bemessungsgrundlage für die einfachen Zinsen } Z \text{ eines Monats } n = \frac{1}{12} \text{ ist das Startkapital } K_0 = 100\,000:$$

$$\begin{aligned} Z &= K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot \frac{1}{12} \cdot i = 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,0432 = 360 \\ 12 \cdot Z &= 12 \cdot 360 = 4\,320 \end{aligned}$$

d.h. die einfachen monatlichen Zinsen betragen 360 € und die Summe aller Zinszahlungen beträgt 4 320 €.

$$\text{b) } 7 \cdot 360 + 3 \cdot 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,0456 + 2 \cdot 100\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,0492 = 4\,480$$

d.h. die Summe aller Zinszahlungen beträgt 4 480 €.

$$\text{c) } \text{Gesparte Zinszahlungen von Angebot 1 im Zeitraum 01.02. bis 31.05.2012:}$$

$$360 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0,02\right) + 360 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0,02\right) + 360 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0,02\right) + 360 = 1\,443,6$$

d.h. die gesparten Zinszahlungen von Angebot 1 betragen 1 443,6 €. Durch die höhere Kaufsumme von Angebot 2 ergibt sich ein Plus von 1 500 €.

1 500 > 1 443,6; d.h. Angebot 2 ist günstiger.

$$\text{d) } 100\,000 \cdot \frac{0,0456}{12} = 380 \text{ und } 100\,000 \cdot \frac{0,0492}{12} = 410$$

Ersparte Zinszahlungen von Angebot 1:

$$380 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0,02\right) + 380 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0,02\right) + 410 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0,02\right) + 410 = 1\,583,85$$

Damit sind die ersparten Zinszahlungen von Angebot 2 höher als die Differenz von 1 500 der beiden unterschiedlichen Kaufpreise, somit ist Angebot 1 günstiger.