Mathematik-Klausur vom 09.02.2010 und Finanzmathematik-Klausur vom 02.02.2010

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 4x - 32}{6x - 24}$

b) Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ eines Unternehmens mit
$$K(x) = e^x \cdot 5x \quad ; x \geq 0$$
Die produzierte Menge x kann am Markt gemäß der folgenden linearen Preis-Absatz Funktion abgesetzt werden:
$$p(x) = 904{,}71 - 0{,}5x \quad ; x \in [0\,;\, 1\,809{,}42]$$

1. Erstellen Sie die Gewinnfunktion.
2. Geben Sie die erste Ableitung der Kostenfunktion an.
3. Wie hoch sind die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 3$?
4. Was besagen die Grenzkosten an dieser Stelle?

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 5x^2 \quad ; x > 0$$
$$h(x) = \frac{x}{\ln x} \quad ; x > 0$$

Aufgabe 2

Aus den drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden die drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Der Rohstoffbedarf (in ME) für jeweils eine ME der Endprodukte ist wie folgt:

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	3
R_2	3	3	1
R_3	5	4	1

Im Lager befinden sich 29 ME von R_1, 22 ME von R_2 und 30 ME von R_3. Um zu bestimmen, wie viele ME der Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, gehen Sie wie folgt vor:

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf.

b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

c) Die Rohstoffe können für 30 GE pro ME von R_1, 20 GE pro ME von R_2 und 10 GE pro ME von R_3 eingekauft werden. Wie hoch sind die Rohmaterialkosten pro ME der Endprodukte?

Aufgabe 3

Ein Unternehmen fertigt die beiden Produkte S und T. Die Gewinnfunktion in Abhängigkeit der Mengen x und y lautet:

$$G(x;y) = -2x^3 - y^2 + 12xy - 700 \ ; x, y \geq 7$$

Dabei stellen x die Produktionsmenge von Gut S (in tausend Stück) und y die Produktionsmenge von Gut T (in tausend Stück) dar.

a) Bestimmen Sie das Gewinn-maximale Produktionsprogramm in Stück.

b) Wie hoch ist der maximale Gewinn in Geldeinheiten?

c) Durch den längerfristigen Ausfall einer Maschine hat sich die Gewinnfunktion geändert und lautet nunmehr wie folgt:

$$G(x;y) = -\frac{1}{4}x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 \ ; x, y, \geq 0$$

Gleichzeitig muss durch den Ausfall der Maschine die Produktionsrestriktion 2x=8y eingehalten werden.

Wie lautet nunmehr das Gewinn-maximale Produktionsprogramm unter Einhaltung der Produktionsrestriktion. Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Aufgabe 4

Eine Person spart vier Jahre monatlich nachschüssig 400 EUR auf einem Konto an. Die Bank gewährt einen Jahreszins von 3,8%.

a) Welchen Betrag hat die Person nach vier Jahren auf ihrem Konto?

b) Welchen Betrag kann die Person fünf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) montalich vorschüssig von dem Konto abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

c) Welchen Betrag kann die Person fünf Jahre lang (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschüssig von dem Konto abheben, wenn sie zusätzlich zwei Jahre nach Ende der Ansparphase 5 000 EUR für eine Sonderanschaffung abhebt? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

d) Wie lange kann die Person (ausgehend vom Ende der Ansparphase) monatlich vorschüssig 606,06 EUR abheben? Der Jahreszins betrage wiederum 3,8%.

Aufgabe 5

Für einen Hauskauf wird am 31.12.2010 ein Kredit in Höhe von 180 000 Euro zu einem Jahreszins von 4,2% aufgenommen. In den Jahren 2011, 2012, 2013 und 2014 werden lediglich die anfallenenden Zinsen bezahlt. Für die Rückzahlung stehen zwei Modelle zur Verfügung:

a) 1. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit einer Ratentilgung über 15 Jahre zurückgezahlt. Berechnen Sie den jährlichen Tilgungsbetrag am Ende des Jahres 2015.

b) 2. Modell: Ab dem Jahr 2015 wird der Kredit mit nachschüssigen Prozentannuitäten in Höhe von 10% der aufgenommenen Schuld zurückgezahlt.

   1. Berechnen Sie die Prozentannuität.
   2. Wie viele volle Prozentannuitäten sind zu leisten?
   3. Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?
   4. Berechnen Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuität, Restschuld) für das Jahr 2024.

Aufgabe 6

Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €
Verzinsung: jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins
Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.

Zinskonditionen:	1. Jahr:	5% p.a.
	2. bis 5. Jahr:	6% p.a.
	6. bis 10. Jahr:	7% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende welchen Jahres übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 165 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinsssatz führt nach zehn Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?

d) Das Unternehmen möchte das Angebot annehmen. Es besteht jedoch auf einer Änderung der Zinssätze im ersten und zehnten Jahr. Wie hoch sind diese beiden Zinssätze, wenn der in a) berechnete Betrag ausgegezahlt werden soll und der Zinssatz im zehnten Jahr doppelt so hoch sein soll wie im ersten Jahr?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+4x-32}{6x-24} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+8)}{6(x-4)} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+8}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

b1) $G(x) = 904{,}71x - 0{,}5x^2 - e^x \cdot 5x$

b2) $K'(x) = e^x \cdot 5x + 5e^x = 5e^x(x+1)$

b3) $K'(3) = 5e^3 \cdot 4 = 20e^3 = 401{,}7107$
d.h. die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 3$ betragen etwa 401,7 GE.

b4) Werden statt 3 ME jetzt 4 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 401,7 GE.

c) $f'(x) = \left(x^{4/3} + 5x^2\right)' = \frac{4}{3}x^{1/3} + 10x$

$h'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Lösung zu Aufgabe 2:

e_1=ME von E_1 und e_2 = ME von E_2 und e_3=ME von E_3

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2e_1 + e_2 + 3_3 & = & 29 \\ \text{II} & 3e_1 + 3e_2 + e_3 & = & 22 \\ \text{III} & 5e_1 + 4e_2 + e_3 & = & 30 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	$\boxed{2}$	1	3	29	
2	3	3	1	22	
3	5	4	1	30	
4	2	1	3	29	1
5	0	$\boxed{3}$	-7	-43	$2 \cdot$ 2 $- 3 \cdot$ 1
6	0	3	-13	-85	$2 \cdot$ 3 $- 5 \cdot$ 1
7	2	1	3	29	4
8	0	3	-7	-43	5
9	0	0	-6	-42	6 $-$ 5

9 $-6e_3 = -42 \Rightarrow e_3 = 7$
8 $3e_2 - 7 \cdot 7 = -43 \Rightarrow 3e_2 = 6 \Rightarrow e_2 = 2$
7 $2e_1 + 2 + 3 \cdot 7 = 29 \Rightarrow 2e_1 = 6 \Rightarrow e_1 = 3$
d.h. aus dem Vorrat können 3 ME von E_1, 2 ME von E_2 und 7 ME von E_3 hergestellt werden.

c) *1. Lösungsweg:*

	E_1	E_2	E_3
R_1	$2 \cdot 30$	$1 \cdot 30$	$3 \cdot 30$
R_2	$3 \cdot 20$	$3 \cdot 20$	$1 \cdot 20$
R_3	$5 \cdot 10$	$4 \cdot 10$	$1 \cdot 10$
	$\sum = 170$	$\sum = 130$	$\sum = 120$

2. Lösungsweg:

$$(30, 20, 10) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (170, 130, 120)$$

d.h. an Rohmaterial kosten eine ME von E_1 genau 170 GE, eine ME von E_2 genau 130 GE und eine ME von R_3 genau 120 GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $G_x(x,y) = -6x^2 + 12y \quad G_{xx}(x,y) = -12x$
$G_y(x,y) = -2y + 12x \quad G_{yy}(x,y) = -2$
$G_{xy}(x,y) = 12$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0 & = & -6x^2 + 12y \\
\text{II} & 0 & = & -2y + 12x \\
\hline
\text{I} + 6 \cdot \text{II} & 0 & = & -6x^2 + 72x = -6x(x-12) \Leftrightarrow x = 12 \text{ oder } \underbrace{x = 0}_{\notin \text{Def.bereich}} \\
\text{II} & 0 & = & -2y + 144 \Leftrightarrow y = 72
\end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y) = (-12x) \cdot (-2) - 12^2 = 24x - 144 \geq_{\text{da } x \geq 7} 24 \cdot 7 - 144 = 24 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x;y) = -12x <_{\text{immer}} 0$; da $x \geq 7$ d.h. (12;72) glob. Max.

d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x = 12$ ME und $y = 72$ ME.

b) $G(12;72) = 1\,028$ d.h. der maximale Gewinn beträgt 1 028 GE.

c) NB: $2x = 8y \Leftrightarrow 2x - 8y = 0$

$L(x,y,\lambda) = -0{,}25x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 + \lambda(2x - 8y)$

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_x(x,y,\lambda) & = & -0{,}5x + 12 + 2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -0{,}5 \\
L_y(x,y,\lambda) & = & -8y + 16 - 8\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -8 \\
L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 2x - 8y & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0
\end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll}
\text{I} & 0 & = & -0{,}5x + 12 + 2\lambda & \\
\text{II} & 0 & = & -8y + 16 - 8\lambda & \\
\text{III} & 0 & = & 2x - 8y & \Rightarrow x = 4y \\
\hline
4 \cdot \text{I} + \text{II} & 0 & = & -2x - 8y + 64 & = -8y - 8y + 64 = -16y + 64 \Leftrightarrow y = 4 \\
\multicolumn{5}{l}{x = 4 \cdot 4 = 16}
\end{array}$$

Der Wert von $\lambda_0 = -2$ wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;-2) = (-0{,}5) \cdot (-8) - 0^2 = 4 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x;y;-2) = -0{,}5 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x,y)$ hat in $(16\,;4)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $r_J = 400\,(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}038) = 4\,883{,}60$

$$R_4 = 4\,833{,}60 \cdot \frac{1{,}038^4 - 1}{0{,}038} = 20\,676{,}34$$

d.h. das Guthaben beträgt 20 676,34 EUR.

b) $$20\,676{,}34 = r_J \cdot \frac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \frac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 4\,618{,}403$$

$4\,618{,}403 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 377{,}1048$
d.h. die Monatsrente beträgt 377,10 EUR.

c) $20\,676{,}34 - \dfrac{5\,000}{1{,}038^2} = 16\,035{,}73$
$16\,035{,}73 = r_J \cdot \dfrac{1{,}038^5 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^5} \Rightarrow r_J = 3\,581{,}846$
$3\,581{,}846 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) \Rightarrow r'_M = 292{,}4672$
d.h. die Monatsrente beträgt 292,47 EUR.

d) $r_J = 606{,}06(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}038) = 7\,422{,}417$
$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{20\,676{,}34}{7\,422{,}417} \cdot 0{,}038\right]}{\ln 1{,}038} = 3{,}013977$
d.h. drei Jahre lang kann die Monatsrente abgehoben werden.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $T = \dfrac{180\,000}{15} = 12\,000$

b)
1. $A = K_0 \cdot (i + t) = 180\,000 \cdot 0{,}10 = 18\,000$
2. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{180\,000}{18\,000} \cdot 0{,}042\right]}{\ln 1{,}042} = 13{,}24019$
   d.h. es sind dreizehn volle Prozentannuitäten zu leisten.
3. $K_{13} = 180\,000 \cdot 1{,}042^{13} - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^{13} - 1}{0{,}042} = 4\,214{,}248$
   $4\,214{,}248 \cdot 1{,}042 = 4\,391{,}25$
   d.h. die Restschuld beträgt 4 391,25 Euro.
4. $K_9 = 180\,000 \cdot 1{,}042^9 - 18\,000 \cdot \dfrac{1{,}042^9 - 1}{0{,}042} = 68\,606{,}10$
   $Z_{10} = K_9 \cdot i = 2\,881{,}46$
   $T_{10} = A - Z_{10} = 15\,118{,}54$
   $K_{10} = K_9 - T_{10} = 53\,487{,}55$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $K_1 = \dfrac{100\,000}{0{,}95} = 105\,263{,}16$
$K_5 = \dfrac{105\,263{,}16}{0{,}94^4} = 134\,823{,}31$
$K_{10} = \dfrac{134\,823{,}31}{0{,}93^5} = 193\,798{,}42$
d.h. der Betrag liegt bei 193 798,42 Euro.
2. Lösungsweg:
$K_{10} = \dfrac{100\,000}{0{,}95 \cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^5} = 193\,798{,}42$

b) nachschüssiger Ersatzzins $i' = \frac{i}{1-i} = \frac{0{,}07}{0{,}93} = 0{,}07526882$

$n = \frac{\ln\left(\frac{165\,000}{134\,823{,}31}\right)}{\ln 1{,}07526882} = 2{,}783222 \Rightarrow 5 + 2{,}783222 = 7{,}783222$

d.h. nach acht Jahren.

c) $q = \sqrt[10]{\frac{193\,798{,}42}{100\,000}} = 1{,}068403$

d.h. der gesuchte Zins beträgt etwa 6,84%.

d)
$$
\begin{array}{rcll}
\frac{100\,000}{(1-i)\cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}93^4 \cdot (1-2i)} & = & 193\,798{,}42 & \\
\frac{100\,000}{0{,}5840408 \cdot (1-i)(1-2i)} & = & 193\,798{,}42 & \mid \cdot \frac{(1-i)(1-2i)}{193\,798{,}42} \\
0{,}8835 & = & (1-i)(1-2i) = 1 - 3i + 2i^2 & \mid \div 2 \\
0{,}44175 & = & i^2 - 1{,}5i + 0{,}5 & \mid -0{,}44175 \\
0 & = & i^2 - 1{,}5i + 0{,}05825 & \mid \text{pq-Formel} \\
i & = & 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 - 0{,}05825} = 0{,}75 \pm 0{,}7101056 & \\
i & = & 0{,}03989437 \text{ oder } i = 1{,}460106 &
\end{array}
$$

d.h der Zins für das erste Jahr beträgt 3,989% und für das zehnte Jahr $2 \cdot 3{,}989 = 7{,}978\%$.