Mathematik-Klausur vom 10. Juli 2007

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 3,4	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Preis-Absatz Funktion:
$$p(x) = 150 - 2x \ \ ; x \in [0; 75]$$

1. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.
2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

b) Bestimmen Sie für die Funktion:
$$g(x) = -4x^2 + 2x \ \ ; x \in \mathbb{R}$$
die Tangente in dem Punkt $x_0 = 1$.

c) Gegeben sind die Matrizen:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Berechnen Sie, falls das Produkt erklärt ist, die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe 2

Das „Rote Kreuz“ plant den Transport von Hilfsgütern in ein Katastrophengebiet. Der Transport soll auf dem Luftweg erfolgen. Dazu werden 38 Sitzplätze für die Hilfsmannschaft, 540 m^2 Stellfläche für Geräte und 3 100 m^3 Kühlraum für Nahrungsmittel benötigt. Die Kapazitäten der vier verschiedenen Flugzeugtypen und der Kerosinverbrauch bei voller Beladung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Flugzeug-typ	Sitzplätze (Anzahl)	Stellfläche (m^2)	Kühlraum (m^3)	Kerosinverbrauch pro 10 000 km
A	2	0	80	25 Tonnen
B	0	20	40	20 Tonnen
C	6	100	540	71 Tonnen
D	16	220	1 280	152 Tonnen

Stellen Sie die Luftflotte so zusammen, dass die Kapazitätsanforderungen genau erfüllt werden und die Kapazitäten der eingesetzten Flugzeuge voll ausgenutzt werden. (Da die Hilfssendung kurzfristig und in einer einmaligen Lieferung erfolgen soll, kann jede Maschine höchstens einmal eingesetzt werden.)

a) Geben Sie alle möglichen ganzzahligen Einsatzmengen an, wenn von jedem Flugzeugtyp fünf Flugzeuge zur Verfügung stehen.

b) Für welchen Einsatzplan würden Sie sich aus Kostengründen entscheiden. (Begründung!)

Aufgabe 3

Ein Unternehmen hat gegenüber einer Bank die folgende Zahlungsverpflichtungen:

Fälligkeitsdatum	Betrag
31.01.2007	20 000 €
30.11.2007	10 000 €
31.05.2008	15 000 €
31.12.2008	12 000 €

Das Unternehmen ist in Liquiditätsschwierigkeiten und bittet die Bank um Zahlungsaufschub. Es einigt sich mit der Bank auf einen einheitlichen Zahlungstermin für die gesamten Zahlungsverpflichtungen: den 31.12.2009. Allerdings berechnet die Bank für den Zahlungsaufschub Zinsen mit einem Nominalzins von 6% p.a.

a) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine monatliche Verzinsung zum realtiven Zins vereinbart wird?

b) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine einfache Verzinsung vereinbart wird? (Bewertungsstichtag: 31.12.2009)

c) Wie hoch ist der am 31.12.2009 zu zahlende Betrag, wenn eine relative gemischte Verzinsung vereinbart wird? (Bewertungsstichtag: 31.12.2009)

d) In das Unternehmen steigt ein neuer Kapitalgeber ein. Dieser bietet der Bank an, am 28.02.2007 zunächst 15 000 € zu zahlen. Der Rest der Schulden soll dafür am 30.06.2010 in einem Betrag gezahlt werden. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn von einer relativen gemischten Verzinsung ausgegangen wird? (Bewertungsstichtag: 30.06.2010)

Aufgabe 4

Ein Bauunternehmer möchte ein Baugelände kaufen und hat die Wahl zwischen zwei verschiedenen Finanzierungsmodellen:

Finanzierungsmodell A

- eine Sofortzahlung in Höhe von 60 000 €
- eine Zahlung in Höhe von 40 000 € zwei Jahre später
- vier Jahre lang jährlich vorschüssige Raten in Höhe von 1 000 €, wobei die erste Rate zum Zeitpunkt der Zahlung in Höhe von 40 000 € fällig wird

Finanzierungsmodell B

- eine Sofortzahlung in Höhe von 20 000 €
- drei Jahre lang monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 1 500 €, wobei die erste Monatsrate sofort fällig wird

- zwei Jahre lang vierteljährlich nachschüssige Rückzahlungsraten in Höhe von 1 000 €, wobei die erste Vierteljahresrate vier Monate nach Zahlung der letzten Monatsrate fällig wird

- eine Rückzahlung in Höhe von 30 000 € zwei Jahre nach Zahlung der letzten vierteljährlichen Rückzahlungsrate

a) Berechnen Sie bei einem Jahreszins von 5% die Barwerte der beiden Finanzierungsmodelle.

b) Für welches Finanzierungsmodell soll sich der Bauunternehmer entscheiden? Begründen Sie kurz Ihr Ergebnis.

Aufgabe 5

In Abhängigkeit des Konsums x_1 von Gut I und des Konsums x_2 von Gut II ist die folgende Nutzenfunktion gegeben:

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} \ ; x_1, x_2 > 0$$

Wie hoch ist der maximale Nutzen unter der Nebenbedingung, dass insgesamt 96 GE zum Kauf der beiden Güter zur Verfügung stehen und der Preis von Gut I genau 0,5 GE pro Stück, der Preis von Gut II genau 4 GE betragen?

Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Lagrange-Methode, wenn das Budget von 96 GE voll ausgenutzt werden soll.

Aufgabe 6

Ein Unternehmen produziert drei Güter A,B und C. Zur Produktion werden die vier Rohstoffe R, S, T und U benötigt. Die Deckungsbeiträge der einzelnen Güter und der Rohstoffverbrauch bei der Produktion der Güter sind wie folgt gegeben:

	Deckungsbeitrag pro ME	Benötigte ME von Rohstoff			
		R pro ME des Gutes	S pro ME des Gutes	T pro ME des Gutes	U pro ME des Gutes
Gut A	5 GE	1 ME	0 ME	2 ME	2 ME
Gut B	3 GE	2 ME	3 ME	0 ME	1 ME
Gut C	6 GE	1 ME	4 ME	1 ME	1 ME

(ME = Mengeneinheit, GE = Geldeinheit)

In der kommmenden Periode stehen von den Rohstoffen die folgenden Mengeneinheiten zur Verfügung:

Rohstoff R	100 ME
Rohstoff S	200 ME
Rohstoff T	400 ME
Rohstoff U	200 ME

Der Deckungsbeitrag der kommenden Periode soll maximiert werden. Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm für die Güter A, B und C.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) 1.
$$\begin{aligned} p &= 150 - 2x \\ 2x &= 150 - p \\ x &= 75 - 0{,}5p \end{aligned}$$
d.h. $x(p) = 75 - 0{,}5p$

2.

x	p
0	150
75	0

d.h. $p \in [0; 150]$; d.h. der Definitionsbereich von $x(p)$ ist das Intervall [0;150]

b) Gesucht: $t(x) = a + bx$

$g'(x) = -8x + 2$

$b = g'(1) = -6$

$$\begin{aligned} t(1) &= g(1) \\ a + b \cdot 1 &= -2 \\ a - 6 \cdot 1 &= -2 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

d.h. $t(x) = 4 - 6x$.

c) $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$

Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert.

Lösung zu Aufgabe 2:

x_1 = ME von Flugzeugtyp A

x_2 = ME von Flugzeugtyp B

x_3 = ME von Flugzeugtyp C

x_4 = ME von Flugzeugtyp D

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 6x_3 + 16x_4 & = & 38 \\ \text{II} & 20x_2 + 100x_3 + 220x_4 & = & 540 \\ \text{III} & 80x_1 + 40x_2 + 540x_3 + 1\,280x_4 & = & 3\,100 \end{array}$$

Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
1	$\boxed{2}$	0	6	16	38	
2	0	20	100	220	540	
3	80	40	540	1 280	3 100	
4	2	0	6	16	38	1
5	0	$\boxed{20}$	100	220	540	2
6	0	40	300	640	1 580	3 $-40 \cdot$ 1
7	2	0	6	16	38	4
8	0	20	100	220	540	5
9	0	0	100	200	500	6 $-2 \cdot$ 5

9 $100x_3 + 200x_4 = 500 \Rightarrow x_3 = 5 - 2x_4$
8 $20x_2 + 100 \cdot (5 - 2x_4) + 220x_4 = 540 \Rightarrow x_2 = 2 - x_4$
7 $2x_1 + 6(5 - 2x_4) + 16x_4 = 38 \Rightarrow x_1 = 4 - 2x_4$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4 - 2x_4 \\ 2 - x_4 \\ 5 - 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in \mathbb{R}\}$$

a) $x_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1. Fall: $x_4 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

Diese Lösung ist möglich und hat einen Kerosinverbrauch von 495 Tonnen.

2. Fall: $x_4 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

Diese Lösung ist möglich und hat einen Kerosinverbrauch von 435 Tonnen.

3. Fall: $x_4 = 2 \Rightarrow \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

Diese Lösung ist möglich und hat einen Kerosinverbrauch von 375 Tonnen.

4. Fall: $x_4 = 3$ oder $x_4 = 4$ oder $x_4 = 5$

Diese Fälle sind nicht möglich, da sie zu negativen Einsatzmengen der übrigen Flugzeugtypen führen.

b) Für die Einsatz-Flotte ein Flugzeug vom Typ C und zwei Flugzeuge von Typ D ist der Kerosinverbrauch am geringsten.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $20\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{35}{12}} + 10\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{25}{12}} + 15\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot\frac{19}{12}} + 12\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12} = 64\,373{,}61$

d.h. die Rückzahlung beträgt 64 373,61 €.

b) $20\,000\cdot\left(1+\dfrac{35}{12}\cdot 0{,}06\right)+10\,000\cdot\left(1+\dfrac{25}{12}\cdot 0{,}06\right)+15\,000\cdot\left(1+\dfrac{19}{12}\cdot 0{,}06\right)+12\,000\cdot 1{,}06 = 63\,895$

d.h. die Rückzahlung beträgt 63 895 €.

c) $20\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\dfrac{11}{12}\cdot 0{,}06\right)+10\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{12}\cdot 0{,}06\right)+15\,000\cdot 1{,}06\cdot\left(1+\dfrac{7}{12}\cdot 0{,}06\right)+12\,000\cdot 1{,}06 = 64\,176{,}64$

d.h. die Rückzahlung beträgt 64 176,64 €.

d) Schulden = Rückzahlungen

$20\,000\cdot 1{,}06^3\cdot\left(1+\dfrac{5}{12}\cdot 0{,}06\right)+10\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\dfrac{7}{12}\cdot 0{,}06\right)+15\,000\cdot 1{,}06^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{12}\cdot 0{,}06\right)+12\,000\cdot 1{,}06\cdot\left(1+\dfrac{6}{12}\cdot 0{,}06\right) = 15\,000\cdot 1{,}06^3\cdot\left(1+\dfrac{4}{12}\cdot 0{,}06\right)+x$

$66\,084{,}958 = 18\,222{,}5448 + x \Rightarrow x = 47\,862{,}41$

d.h. die Rückzahlung beträgt 47 862,41 €.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Modell A:

$K_0 = 60\,000 + \dfrac{40\,000}{1{,}05^2} + 1\,000\cdot 1{,}05\cdot\dfrac{1{,}05^4-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^6} = 60\,000 + 36\,281{,}1791 + 3\,377{,}0957 = 99\,658{,}2749$

d.h. der Barwert beträgt 99 658,28 €.

Modell B:

$K_0 = 20\,000 + 1\,500\cdot\left(12+\dfrac{13}{2}\cdot 0{,}05\right)\cdot\dfrac{1{,}05^3-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^3}+1\,000\cdot\left(4+\dfrac{3}{2}\cdot 0{,}05\right)\cdot\dfrac{1{,}05^2-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^5}+\dfrac{30\,000}{1{,}05^7} = 20\,000 + 50\,346{,}0479 + 6\,545{,}3817 + 21\,320{,}4399 = 98\,211{,}8695$

d.h. der Barwert beträgt 98 211,87 €.

b) Modell B mit dem kleineren Barwert ist vorteilhafter.

Lösung zu Aufgabe 5:

$L(x_1,x_2,\lambda) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} + \lambda(0{,}5x_1 + 4x_2 - 96)\ ;\ x_1, x_2 > 0$

$L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} + 0{,}5\lambda \qquad L_{x_1x_1}(x_1,x_2,\lambda) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x_1^3}}$

$L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{x_2}} + 4\lambda \qquad L_{x_2x_2}(x_1,x_2,\lambda) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x_2^3}}$

$L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = 0{,}5x_1 + 4x_2 - 96 \quad L_{x_1x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 0$
Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 0 = L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} + 0{,}5\lambda \\
\text{II} & 0 = L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{x_2}} + 4\lambda \\
\text{III} & 0 = L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = 0{,}5x_1 + 4x_2 - 96 \\
\hline
8\cdot\text{I} - \text{II} & 0 = \dfrac{4}{\sqrt{x_1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow \dfrac{16}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = 16x_2 \\
\hline
\text{III} & 0 = 0{,}5\cdot 16x_2 + 4x_2 - 96 \\
 & 0 = 12x_2 - 96 \\
 & x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = 16\cdot 8 = 128 \\
\text{I} & 0 = \frac{1}{2\sqrt{128}} + 0{,}5\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{128}}
\end{array}$$

Hinreichende Bedingung:

$$D(x_1,x_2,-\frac{1}{\sqrt{128}}) = \left(-\frac{1}{4\sqrt{x_1^3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}}\right) - 0^2 >_{\text{immer}} 0$$

$$L_{x_1x_1}(x_1,x_2,-\frac{1}{\sqrt{128}}) = -\frac{1}{4\sqrt{x_1^3}} <_{\text{immer}} 0$$

d.h. $u(x_1,x_2)$ hat in $(128;8)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.
Der maximale Nutzen beträgt $u(128;8) = 16{,}97$ Einheiten.

Lösung zu Aufgabe 6:
x_1 = ME von Gut A
x_2 = ME von Gut B
x_3 = ME von Gut C
Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \leq & 100 \\
\text{II} & 3x_2 + 4x_3 & \leq & 200 \\
\text{III} & 2x_1 + x_3 & \leq & 400 \\
\text{IV} & 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 200
\end{array}$$

Ziel: $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \stackrel{!}{=}$ maximal; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
$e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0$ Schlupfvariablen
Simplexalgorithmus:

1.	x_1	x_2	x_3	
e_1	1	2	1	100
e_2	0	3	$\boxed{4}$	200
e_3	2	0	1	400
e_4	2	1	1	200
	-5	-3	-6	0

2.	x_1	x_2	e_2	
e_1	$\boxed{1}$	$5/4$	$-1/4$	50
x_3	0	$3/4$	$1/4$	50
e_3	2	$-3/4$	$-1/4$	350
e_4	2	$1/4$	$-1/4$	150
	-5	$3/2$	$3/2$	300

3.	e_1	x_2	e_2	
x_1	1	5/4	−1/4	50
x_3	0			50
e_3	−2			250
e_4	−2			50
	5	31/4	1/4	550

Die optimale Lösung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ mit optimalem Zielfunktionswert } Z = 550$$

d.h. um einen maximalen Deckungsbeitrag zu erzielen, sind 50 ME von Gut A, keine ME von Gut B und 50 ME von Gut C herzustellen und abzusetzen.