Die Lösungen sind ein Lösungsvorschlag. Aus dem Lösungsvorschlag ergeben sich keine rechtlichen Ansprüche.

Mathematik-Klausur vom 11. Februar 2005

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 2,3,4,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 2,3,4,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 2,3	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Bei einem Unternehmen berechnet sich der Gewinn des wichtigsten Gutes in Abhängigkeit der Produktions- und Absatzmenge x durch:
$$G(x) = -4x^2 + 50x - 100 \ ; x \in [0; 20]$$
Für welche Produktions- und Absatzmengen ergibt sich ein positiver Gewinn?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung der beiden Funktionen:
$$f(x) = \frac{1}{2x} + \sqrt{x} \ ; x > 0$$
$$g(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) \ ; x \in \mathbb{R}$$

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Herr Z. hat zum 31.12.2001 seine Ersparnisse und eine Abfindung bei einer Hausbank angelegt, um in den Jahren 2002 bis 2011 eine vorschüssige Monatsrente von 500 € zu beziehen. Herr Z. und seine Hausbank vereinbaren einen Zins von 4,25% pro Jahr.

a) Wie hoch war der am 31.12.2001 angelegt Betrag?

b) Unvorhergesehen muss Herr Z. zum Ende des Jahres 2006 einen Betrag in Höhe von 8 500 € für die Erneuerung seiner Heizungsanlage von diesem Konto entnehmen. Dafür will er in diesem Jahr (2006) auf die monatliche Auszahlung verzichten. Wie hoch werden dann die vorschüssigen Monatsraten für die Jahre 2007 bis 2011 ausfallen?

c) Herr Z. überlegt:„Hätte man die Zahlung von 8 500 € zum 31.12.2006 für die Erneuerung der Heizungsanlage von Anfang an in die Planung einbezogen. Welche vorschüssige Monatsrente hätte sich dann für die Jahre 2002 bis 2011 ergeben?“. Beantworten Sie Herrn Z. diese Frage.

Aufgabe 3

Eine Familie kauft für 220 000 € ein Haus. Dazu nimmt sie bei 6% Zinsen p.a. von einer Bank einen Kredit in Höhe von 60% des Kaufpreises auf. Zur Rückzahlung des Kredits wird vereinbart, zu Beginn eines jeden Quartals 4 000 € an die Bank zu überweisen. Die erste Rückzahlung ist fällig bei Darlehnsaufnahme.

a) Wie viele Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten?

b) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des neunten Jahres?

c) Zu Beginn des neunten Jahres nach Kreditaufnahme soll die noch bestehende Schuld durch eine einmalige Restzahlung zurückgezahlt werden. Für die vorzeitige Rückzahlung erhebt die Bank wegen entgangener Zinsen eine so genannte Vorfälligkeitsentschädigung in Höhe von 2,5% des vorzeitig zurückgezahlten Kapitals. Welcher Betrag ist dann zu Beginn des neunten Jahres an die Bank zu zahlen?

Aufgabe 4
Ein Monopolist produziert zwei Güter$A$ und B. Die Produktions- und Absatzmenge von Gut A sei x_1, die Produktions- und Absatzmenge von Gut B sei x_2. Die Gewinnfunktion des Unternehmens sei gegeben durch:

$$G(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 8x_2 \;\; ; x_1, x_2 \in [0; 10]$$

Die Herstellung der beiden Güter erfolgt auf einer Produktionsanlage. Die Produktionszeit für beide Güter auf der Anlage beträgt jeweils zwei Zeitstunden pro Mengeneinheit. Insgesamt stehen auf der Produktionsanlage vierzehn Zeiteinheiten zur Verfügung, die voll ausgeschöpft werden sollen.

a) Welche Stückzahlen sollen jeweils von Gut A und Gut B hergestellt werden, damit der Gewinn des Monopolisten maximal wird? Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit der Methode von Lagrange.

b) Wie hoch ist der maximale Gesamtgewinn?

c) Aufgrund eines technischen Defekts sinkt die Kapazität der Produktionsanlage auf neun Zeiteinheiten. Wie verändert sich hierdurch das Gewinn-maximale Produktionsprogramm?

Aufgabe 5
Ein Unternehmen produziert vier Güter P_1, P_2, P_3, P_4 aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4. Der Bedarf (in ME) an Rohstoffen pro ME der Endprodukte beträgt (Produktionsmatrix):

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	1	1	2	3
R_2	3	2	2	1
R_3	1	2	1	0
R_4	6	6	7	7

Vom ersten Rohstoff stehen 100 ME, vom zweiten Rohstoff 150 ME, vom dritten Rohstoff 200 ME und vom vierten Rohstoff 550 ME zur Verfügung. Bei der Produktion sollen alle Rohstoffvorräte verbraucht werden. Zeigen Sie, dass es dann keine ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramme gibt. Lösen Sie dazu zunächst das lineare Gleichungssystem und zeigen Sie anschließend, dass keine der Lösungen ökonomisch sinnvoll ist.

Aufgabe 6

a) Bei einem Unternehmen berechnet sich der Gewinn des wichtigsten Gutes in Abhängigkeit der Produktions- und Absatzmenge x durch:

$$G(x) = -4x^2 + 50x - 100 \ \ ; x \in [0; 20]$$

Für welche Produktions- und Absatzmengen ergibt sich ein positiver Gewinn?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung der beiden Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \sqrt{x} \ \ ; x > 0$$
$$g(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) \ \ ; x \in \mathbb{R}$$

c) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \text{Z} = 2x_1 + 3x_2 \overset{!}{=} \text{maximal}; \ x_1, x_2 \geq 0 & \\ \text{unter} \quad x_1 + 4x_2 \leq 2 & \\ \qquad\quad x_1 + x_2 \leq 1 & \end{array}$$

Lösungen:

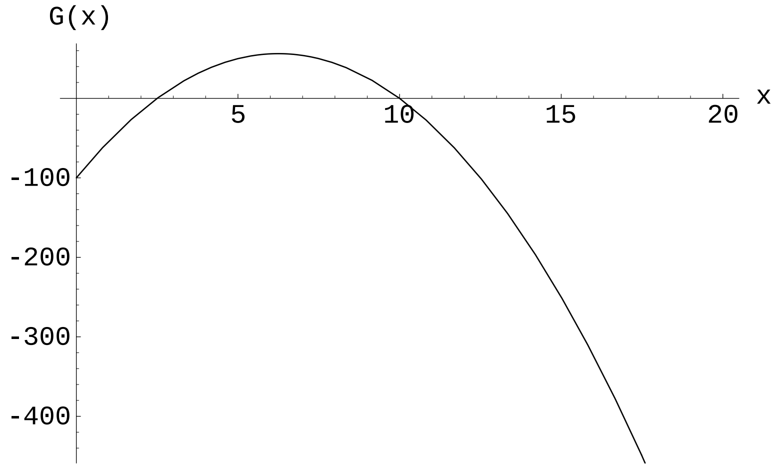
Lösung zu Aufgabe 1

a) Gewinnzone:

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& -4x^2 + 50x - 100 & \mid \div(-4) \\ 0 &=& x^2 - 12{,}5x + 25 & \mid pq - \text{Formel} \\ x &=& 6{,}25 \pm \sqrt{39{,}0625 - 25} & \\ x &=& 6{,}25 \pm \sqrt{14{,}0625} & \\ x &=& 6{,}25 \pm 3{,}75 & \\ x &=& 2{,}5 \text{ oder } x = 10 & \end{array}$$

$G(0) = -100$

d.h. die Gewinnzone ist das Intervall $(2{,}5; 10)$



b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) Vollständige Elimination:

Zeile							Operation
1	$\boxed{1}$	2	−1	1	0	0	
2	3	5	1	0	1	0	
3	1	4	−8	0	0	1	
4	1	2	−1	1	0	0	1
5	0	$\boxed{-1}$	4	−3	1	0	2 −3 · 1
6	0	2	−7	−1	0	1	3 − 1
7	1	2	−1	1	0	0	4
8	0	−1	4	−3	1	0	5
9	0	0	1	−7	2	1	6 +2 · 5
10	1	0	7	−5	2	0	5 · 7 +2 · 8
11	0	−1	4	−3	1	0	8
12	0	0	1	−7	2	1	9
13	1	0	0	44	−12	−7	10 −7 · 12
14	0	−1	0	25	−7	−4	11 −4 · 12
15	0	0	1	−7	2	1	12
16	1	0	0	44	−12	−7	13
17	0	1	0	−25	7	4	14 ·(−1)
18	0	0	1	−7	2	1	15

Also ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 44 & -12 & -7 \\ -25 & 7 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$r_J = 500(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) = 6\,138{,}125$

Barwert der Rentenzahlungen:

$R_0 = 6\,138{,}125 \cdot \dfrac{1{,}0425^{10} - 1}{0{,}0425} \cdot \dfrac{1}{1{,}0425^{10}} = 49\,171{,}83$

d.h. der angelegte Betrag betrug 49 171,83 €.

b) Guthaben am 31.12.2005:

$R_4 = 49\,171{,}83 \cdot 1{,}0425^4 - 6\,138{,}125 \cdot \dfrac{1{,}0425^4 - 1}{0{,}0425} = 31\,916{,}659$

Guthaben am 31.12.2006:
$31\,916{,}659 \cdot 1{,}0425 - 8\,500 = 24\,773{,}117$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$24\,773{,}117 = r_J \frac{1{,}0425^5 - 1}{0{,}0425} \cdot \frac{1}{1{,}0425^5} \Rightarrow r_J = 5\,603{,}8534$$

Vorschüssige Monatsrente r_M:
$5\,603{,}8534 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) \Rightarrow r_M = 456{,}48$
d.h. die Monatsrente in den Jahren 2007 bis 2011 beträgt 456,48 €.

c) Barwert der Monatsrente:
$$49\,171{,}83 - \frac{8\,500}{1{,}0425^5} = 42\,268{,}8183$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$42\,268{,}8183 = r_J \cdot \frac{1{,}0425^{10} - 1}{0{,}0425} \cdot \frac{1}{1{,}0425^{10}} \Rightarrow r_J = 5\,276{,}42$$

Vorschüssige Monatsrente r_M:
$5\,276{,}42 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) \Rightarrow r_M = 429{,}81$
d.h. die Monatsrente beträgt 429,81 €.

Lösung zu Aufgabe 3
$0{,}6 \cdot 220\,000 = 132\,000$

a) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 4\,000(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}06) = 16\,600$
Laufzeit bei bekanntem Barwert:
$$r_J = -\frac{\ln[1 - \frac{132\,000}{16\,600} \cdot 0{,}06]}{\ln 1{,}06} = 11{,}1274$$
d.h. elf Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten.

b) $K_8 = 132\,000 \cdot 1{,}06^8 - 16\,600 \cdot \dfrac{1{,}06^8 - 1}{0{,}06} = 210\,387{,}95 - 164\,297{,}97 = 46\,089{,}98$
d.h. zu Beginn des neunten Jahres beträgt die Restschuld 46 089,98 €.

c) $46\,089{,}98 \cdot 1{,}025 = 1\,152{,}25 + 46\,089{,}98 = 47\,242{,}23$
d.h. es sind 47 242,23 € zu zahlen.

Lösung zu Aufgabe 4
Als abkürzende Schreibweise wird $x = x_1$ und $y = x_2$ gewählt.

a) Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 8y + \lambda(2x + 2y - 14)$
$L_x(x, y, \lambda) = -4x + 2y + 2\lambda$ $\quad L_{xx}(x, y, \lambda) = -4$
$L_y(x, y, \lambda) = 2x - 2y + 8 + 2\lambda$ $\quad L_{yy}(x, y, \lambda) = -2$
$L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x + 2y - 14$ $\quad L_{xy}(x, y, \lambda) = 2$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 & = & -4x+2y+2\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \; = \; 2x-y \\
\text{II} & 0 & = & 2x-2y+8+2\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \; = \; y-x-4 \\
\text{III} & 0 & = & 2x+2y-14 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \; = \; x+y-7 \Leftrightarrow y = 7-x
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda \\
2x-y &= y-x-4 \\
2x-(7-x) &= (7-x)-x-4 \\
3x-7 &= 3-2x \\
5x &= 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 7-2 = 5 \Rightarrow \lambda = 2\cdot 2-5 = -1
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x,y,-1) = (-4)\cdot(-2) - 2^2 = 4 >_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x,y,-1) = -4 <_{\text{immer}} 0$
d.h. es sind 2 ME von Gut A und 5 ME von Gut B herzustellen.

b) $G(2;5) = -8+20-25+40 = 27$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 27 GE.

c) $G(x,y) \stackrel{!}{=}$ maximal unter NB $2x+2y=9 \Rightarrow y = 4{,}5-x$

$$\begin{aligned}
\text{Setze } G(x) &= -2x^2+2x(4{,}5-x)-(4{,}5-x)^2+8(4{,}5-x) \\
&= -2x^2+9x-2x^2-20{,}25+9x-x^2+36-8x \\
&= -5x^2+10x+15{,}75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G'(x) &= -10x+10 \\
G''(x) &= -10
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$0 = -10x+10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3{,}5$

Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -10 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $(1\,;3{,}5)$ glob. Max unter NB
d.h. es sind eine ME von Gut A und 3,5 ME von Gut B herzustellen.

Lösung zu Aufgabe 5
x_1=ME von P_1
x_2=ME von P_2
x_3=ME von P_3
x_4=ME von P_4
Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1+x_2+2x_3+3x_4 & = & 100 \\
\text{II} & 3x_1+2x_2+2x_3+x_4 & = & 150 \\
\text{III} & x_1+2x_2+x_3 & = & 200 \\
\text{IV} & 6x_1+6x_2+7x_3+7x_4 & = & 550
\end{array}$$

Gauß-Algorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
1	$\boxed{1}$	1	2	3	100	
2	3	2	2	1	150	
3	1	2	1	0	200	
4	6	6	7	7	550	
5	1	1	2	3	100	1
6	0	-1	-4	-8	-150	2 $-3\cdot$ 1
7	0	$\boxed{1}$	-1	-3	100	3 $-$ 1
8	0	0	-5	-11	-50	4 $-6\cdot$ 1
9	1	1	2	3	100	5
10	0	1	-1	-3	100	7
11	0	0	$\boxed{-5}$	-11	-50	6 + 7
12	0	0	-5	-11	-50	8
13	1	1	2	3	100	9
14	0	1	-1	-3	100	10
15	0	0	$\boxed{-5}$	-11	-50	11
16	0	0	0	0	0	12 $-$ 11

15 $-5x_3 - 11x_4 = -50 \Rightarrow x_3 = 10 - 2{,}2x_4$
14 $x_2 - (10 - 2{,}2x_4) - 3x_4 = 100 \Rightarrow x_2 = 110 - 0{,}8x_4$
13 $x_1 + (110 + 0{,}8x_4) + 2(10 - 2{,}2x_4) + 3x_4 = 100 \Rightarrow x_1 = -30 + 0{,}6x_4$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -30 + 0{,}6x_4 \\ 110 + 0{,}8x_4 \\ 10 - 2{,}2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge:

1) $x_1 = -30 + 0{,}6x_4 \geq 0 \Rightarrow 0{,}6x_4 \geq 30 \Rightarrow x_4 \geq 50$
2) $x_2 = 110 + 0{,}8x_4 \geq 0 \Rightarrow 0{,}8x_4 \geq -110 \Rightarrow x_4 \geq -137{,}5$
3) $x_3 = 10 - 2{,}2x_4 \geq 0 \Rightarrow 10 \geq 2{,}2x_4 \Rightarrow 4{,}\overline{54} \geq x_4$
4) $x_4 \geq 0$

d.h. sowohl $x_4 \in [50; +\infty)$ als auch $x_4 \in [0; 4{,}\overline{54}]$
d.h. die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge ist leer.

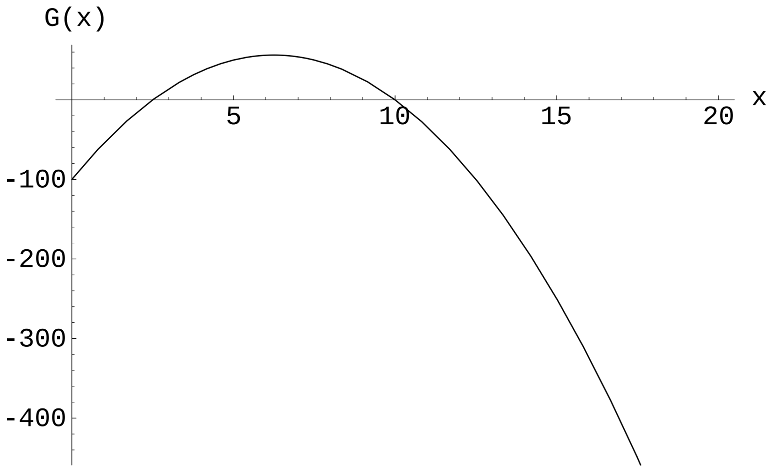
Lösung zu Aufgabe 6

a) Gewinnzone:

$$\begin{aligned}
0 &= -4x^2 + 50x - 100 && \mid \div(-4) \\
0 &= x^2 - 12{,}5x + 25 && \mid pq - \text{Formel} \\
x &= 6{,}25 \pm \sqrt{39{,}0625 - 25} \\
x &= 6{,}25 \pm \sqrt{14{,}0625} \\
x &= 6{,}25 \pm 3{,}75 \\
x &= 2{,}5 \text{ oder } x = 10
\end{aligned}$$

$G(0) = -100$

d.h. die Gewinnzone ist das Intervall $(2{,}5; 10)$



b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) Simplex-Algorithmus:

	x_1	x_2	
e_1	1	$\boxed{4}$	2
e_2	1	1	1
	-2	-3	0

	x_1	e_1	
x_2	$1/4$	$1/4$	$1/2$
e_2	$3/4$	$-1/4$	$1/2$
	$-5/4$	$3/4$	$3/2$

	e_2	e_1	
x_2	$-1/3$	$1/2$	$1/3$
x_1	$4/3$	$-1/3$	$2/3$
	$5/3$	$1/3$	$7/3$

d.h. die optimale Lösung beträgt $x_1 = 2/3$ und $x_2 = 1/3$ mit dem optimalen Zielfunktionswert von $7/3$.