Mathematik-Klausur vom 11. Juli 2006

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 3,4	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die beiden Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie:

1) $2 \cdot A - B$

2) $2A^2 - A \cdot B$

3) A^{-1}

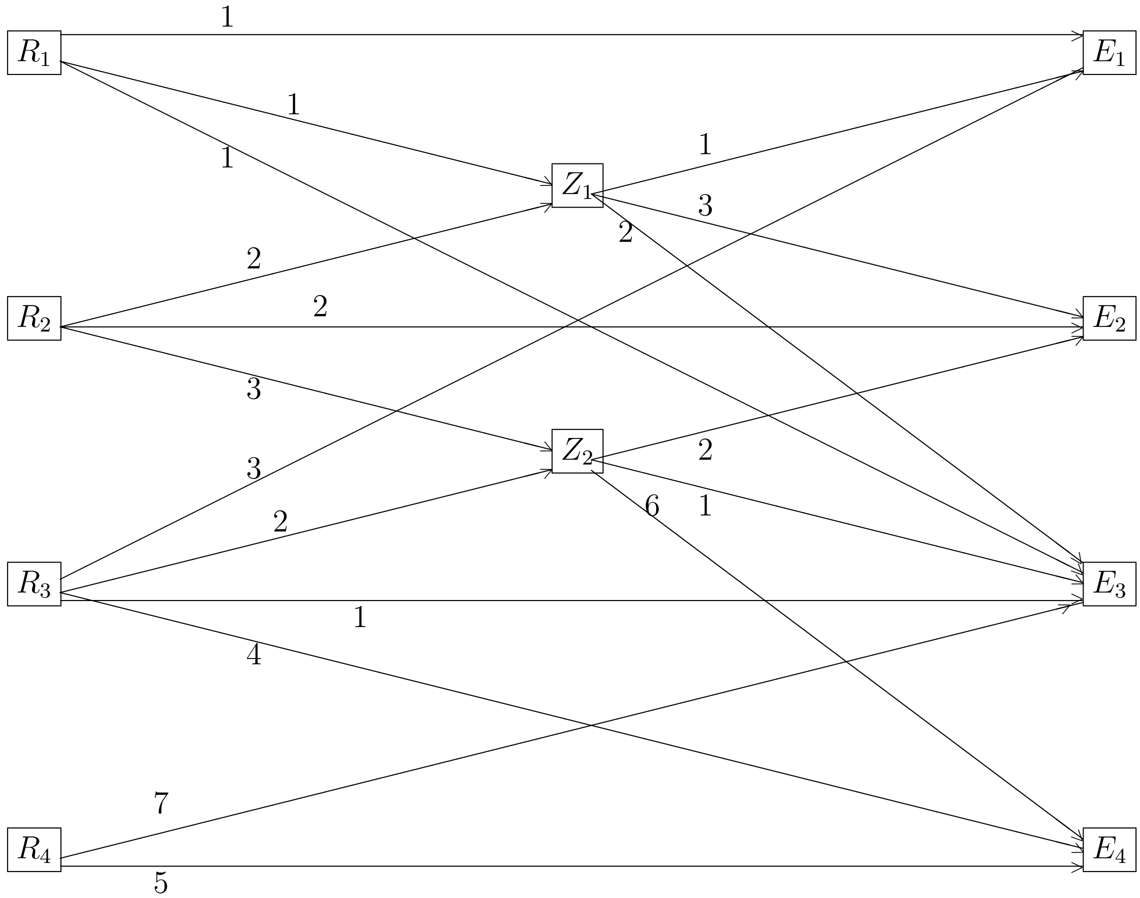
b) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 5}$

c) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf streng relative Extremwerte (lokale Extremstellen) und Sattelpunkte (Sattelstellen):

$$f(x, y) = x^3 - 12x - y^2 + 2y - 10 \;\; ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Aufgabe 2

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Rohmaterialien R_1, R_2, R_3, R_4 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und anschließend die Endprodukte E_1, E_2, E_3, E_4 hergestellt. Der Matrialfluss ist in folgender Grafik dargestellt:



a) Berechnen Sie den Gesamtbedarf (in ME) an Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 für die Herstellung jeweils einer Mengeneinheit von E_1, E_2, E_3, E_4.

b) Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4 werden benötigt, um 10 ME von E_1, 20 ME von E_2, 30 ME von E_3 und 40 ME von E_4 herzustellen?

c) Im Lager befindet sich ein Vorrat von 31 ME von R_1, 127 ME von R_2, 55 ME von R_3 und 26 ME von R_4. Wie viele Stückzahlen der Endprodukte lassen sich aus dem Vorrat herstellen, wenn der Vorrat vollständig aufgebraucht werden soll?

Aufgabe 3

Student A. zahlt vorschüssig monatlich Raten von 50 € ein. Die Laufzeit dieses Sparvorhabens ist so bemessen, dass er am Ende dieses Sparvorhabens über 10 572 € verfügen könnte. Die Zinsen betragen 3,2 % p.a.

a) Wie viele Jahre lang muss Student A. einzahlen?

b) Wie hoch ist der Barwert dieses Sparvorhabens?

c) Welchen Betrag könnte Student A. vier Jahre nach Sparbeginn abheben, wenn er am Ende der Laufzeit statt 10 572 nur 8 000 € benötigt?

d) Welche sechs gleich großen Beträge könnte Student A. jeweils am Ende der ersten sechs Jahre abheben, wenn er am Ende der Laufzeit statt 10 572 nur 8 000 €

benötigt?

Aufgabe 4

Zur Finanzierung seines Studiums an der FH Köln nimmt ein Studierender einen Kredit bei einer Bank auf. Mit diesem Kredit möchte er die Studiengebühren in Höhe von 500 € pro Semester und seine anfallenden Lebenshaltungskosten begleichen. Der Kredit ist wie folgt ausgestaltet:

- monatliche Auszahlungen von 550 € beginnend am 1.10.2006 (Beginn des Wintersemesters)
- Zinsen 5,1 % p.a.
- Laufzeit vier Jahre
- Rückzahlungsbeginn frühestens 12 Monate nach der letzten Auszahlung
- Flexibilität in der Rückzahlungshöhe
- außerplanmäßige Rückzahlung in der Tilgungsphase möglich und kostenfrei

a) Wie hoch ist die Schuld am Ende der Laufzeit des Kredits?

b) Der Kreditnehmer entscheidet sich, mit der Rückzahlung zwei Jahre zu warten und dann vierteljährlich nachschüssig 450 € zurückzuzahlen, wobei die erste Rate am 31.12.2012 fällig wird. Der Zins beträgt nach wie vor 5,1 % p.a. Wie viele Jahre werden Rückzahlungsraten in voller Höhe geleistet?

c) Wie hoch ist in b) die Restschuld zum Zeitpunkt der letzten vollen Rückzahlungsrate?

d) Durch welche Einmalzahlung am 30.09.2012 hätte der Kreditnehmer die Rückzahlungsdauer in b) auf 20 Jahre reduzieren können?

Aufgabe 5

Eine Unternehmung stellt aus zwei Rohstoffen ein Endprodukt her. Die Unternehmung geht zur Steuerung des Produktionsprozesses von folgender Produktionsfunktion aus:

$$x = 2 \cdot r_1^{\frac{1}{2}} \cdot r_2^{\frac{1}{2}} \quad ; r_1, r_2 > 0$$

r_1 = verbrauchte Mengeneinheiten des ersten Rohstoffs,
r_2 = verbrauchte Mengeneinheiten des zweiten Rohstoffs und
x = produzierte und abgesetzte Mengeneinheiten des Endprodukts

Eine Mengeneinheit des ersten Rohstoffs kostet 10 Geldeinheiten, eine Mengeneinheit des zweiten Rohstoffs kostet 20 Geldeinheiten. Neben den Rohstoffkosten fallen Fixkosten in Höhe von 200 Geldeinheiten an.
Eine Mengeneinheit des Endprodukts erzielt am Markt einen Preis von 40 Geldeinheiten.

a) Vom Endprodukt sollen genau 10 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden. Wie hoch ist der maximale Gewinn und wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe werden dabei verbraucht?
(Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

b) Vom Endprodukt sollen genau 10 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden. Für die beiden Rohstoffe sollen genau 150 Geldeinheiten ausgegeben werden. Wie hoch ist der maximale Gewinn und wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe werden dabei verbraucht?

Aufgabe 6
Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lcl} \text{Z}=2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max & & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) 1) $2A - B = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $2A^2 - AB = A(2A - B) = A \cdot E = A$

3) $A^{-1} = \dfrac{1}{3 \cdot 1 - (-2) \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 5} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

c) $f_x(x, y) = 3x^2 - 12$
$f_y(x, y) = -2y + 2$
$f_{xx}(x, y) = 6x$
$f_{yy}(x, y) = -2$
$f_{xy}(x, y) = 0$
Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lcll} \text{I} \quad 0 & = & 3x^2 - 12 & \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{II} \quad 0 & = & -2y + 2 & \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(-2;\,1) = (-12) \cdot (-2) - 0 = 24 > 0$
$f_{xx}(-2; 1) = -12 < 0$
d.h. $(-2; 1)$ lok. Max
$D(2;\,1) = 12 \cdot (-2) - 0 = -24 < 0$
d.h. $(2;\,1)$ ist eine Sattelstelle.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Direktbedarf

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ \hline R_1 & 1 & 0 \\ R_2 & 2 & 3 \\ R_3 & 0 & 2 \\ R_4 & 0 & 0 \end{array}}_{=A} \qquad \underbrace{\begin{array}{c|cccc} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \hline Z_1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ Z_2 & 0 & 2 & 1 & 6 \end{array}}_{=B} \qquad \underbrace{\begin{array}{c|cccc} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \hline R_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ R_2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ R_3 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ R_4 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}}_{=C}$$

$$\text{Gesamtbedarf } M = A \cdot B + C = \begin{array}{c|rrrr} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \hline R_1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ R_2 & 2 & 14 & 7 & 18 \\ R_3 & 3 & 4 & 3 & 16 \\ R_4 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}$$

b) $M \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 1\,230 \\ 840 \\ 410 \end{bmatrix}$

d.h. es werden 170 ME von R_1, 1 230 ME von R_2, 840 ME von R_3 und 410 ME von R_4 benötigt.

c) e_1 = ME von E_1
e_2 = ME von E_2
e_3 = ME von E_3
e_4 = ME von E_4

Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3	e_4	r	Operation
1	$\boxed{2}$	3	3	0	31	
2	2	14	7	18	127	
3	3	4	3	16	55	
4	0	0	7	5	26	
5	2	3	3	0	31	1
6	0	11	4	18	96	2−1
7	0	$\boxed{-1}$	−3	32	17	2 · 3−3 · 1
8	0	0	7	5	26	4
9	2	3	3	0	31	5
10	0	−1	−3	32	17	7
11	0	0	$\boxed{-29}$	370	283	6+11 · 7
12	0	0	7	5	26	8
13	2	3	3	0	31	9
14	0	−1	−3	32	17	10
15	0	0	−29	370	283	11
16	0	0	0	2 735	2 735	29 · 12 +7 · 11

16 $2\,735 e_4 = 2\,735 \Rightarrow e_4 = 1$
15 $-29 e_3 + 370 = 283 \Rightarrow e_3 = 3$
14 $-e_2 - 9 + 32 = 17 \Rightarrow e_2 = 6$
13 $2e_1 + 18 + 9 = 31 \Rightarrow e_1 = 2$

d.h. aus dem Vorrat können 2 ME von E_1, 6 ME von E_2, 3 ME von E_3 und 1 ME von E_4 hergestellt werden.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente r_J:
$r_J = 50(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}032) = 610{,}40$
Laufzeit in Jahren:
$$n = \frac{\ln[1 + \frac{10\,572}{610{,}4} \cdot 0{,}032]}{\ln 1{,}032} = 14$$
d.h. Student A. muss 14 Jahre lang sparen.

b) Barwert:
$$R_0 = \frac{10\,572}{1{,}032^{14}} = 6\,802{,}08$$
d.h. der Barwert beträgt 6 802,08 €.

c) $$\frac{10\,572 - 8\,000}{1{,}032^{10}} = 1\,877{,}04$$
d.h. Student A. könnte am Ende des vierten Jahres 1 877,04 € abheben.

d) Sechs Abhebungen r_j:
$$10\,572 - r_j \cdot \frac{1{,}032^6 - 1}{0{,}032} \cdot 1{,}032^8 = 8\,000$$

$$r_j \cdot \frac{1{,}032^6 - 1}{0{,}032} \cdot 1{,}032^8 = 2\,572 \Rightarrow r_j = 307{,}51$$
d.h. Student A. kann sechs Jahre lang jeweils 307,51 € am Ende des Jahres abheben.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$$r_J = 550(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}051) = 6\,782{,}325$$
Schuld nach 4 Jahren:
$$R_4 = 6\,782{,}325 \cdot \frac{1{,}051^4 - 1}{0{,}051} = 29\,276{,}1544$$
d.h. die Schuld am 30.09.2010 beträgt 29 276,15 €.

b) Schuld am 30.09.2012:
$$29\,276{,}15 \cdot 1{,}051^2 = 32\,338{,}47$$
Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$$r_J = 450(4 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}051) = 1\,834{,}425$$

1. Laufzeit der Rückzahlungen:
$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{32\,338{,}47}{1\,834{,}425} \cdot 0{,}051]}{\ln 1{,}051} = 46{,}1$$
d.h. 46 Jahre lang erfolgen Rückzahlungen in voller Höhe.

2. $$\begin{aligned} K_{46} &= 32\,338{,}47 \cdot 1{,}051^{46} - 1\,834{,}425 \cdot \tfrac{1{,}051^{46}-1}{0{,}051} \\ &= 318\,745{,}7523 - 318\,562{,}2954 \\ &= 183{,}4569 \end{aligned}$$
d.h. die Restschuld nach 46 Jahren beträgt 183,46 €.

3. Barwert der quartalsmäßigen Rückzahlungen:
$$R_0 = 1\,834{,}425 \cdot \frac{1{,}051^{20} - 1}{0{,}051} \cdot \frac{1}{1{,}051^{20}} = 22\,668{,}3881$$
$$32\,338{,}47 - 22\,668{,}3881 = 9\,670{,}08$$
d.h. die Einzahlung beträgt 9 670,08 €.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $U(r_1; r_2) = p \cdot x = 40 \cdot x = 40 \cdot 2 \cdot r_1^{\frac{1}{2}} \cdot r_2^{\frac{1}{2}} = 80\sqrt{r_1 \cdot r_2}$
$K(r_1; r_2) = 10r_1 + 20r_2 + 200$
$G(r_1; r_2) = 80\sqrt{r_1 \cdot r_2} - 10r_1 - 20r_2 - 200$

b) $G(r_1; r_2) \stackrel{!}{=}$ maximal unter NB: $x = 10$
Einsetzmethode:
$$\begin{aligned} \text{NB:}\quad 10 &= x = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2} && \mid \div 2 \\ 5 &= \sqrt{r_1 \cdot r_2} && \mid \text{quadrieren} \\ 25 &= r_1 \cdot r_2 && \mid \div r_1 \\ \frac{25}{r_1} &= r_2 \end{aligned}$$

$G(r_1) = 400 - 10r_1 - 20 \cdot \dfrac{25}{r_2} - 200 = -10r_1 - \dfrac{500}{r_1} + 200$

$G'(r_1) = -10 + \dfrac{500}{r_1^2}$

$G''(r_1) = -\dfrac{1\,000}{r_1^3}$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{rcll}
0 & = & -10 + \dfrac{500}{r_1^2} & \mid +10 \\
10 & = & \dfrac{500}{r_1^2} & \mid \cdot r_1^2 \\
10r_1^2 & = & 500 & \mid \div 10 \\
r_1^2 & = & 50 & \text{Wurzel} \\
r_1 & = & 7{,}07 \text{ oder } \underbrace{r_1 = -7{,}07}_{\notin \text{ Def.bereich}} &
\end{array}$$

$r_2 = \dfrac{25}{7{,}07} = 3{,}54$

Hinreichende Bedingung:

$G''(r_1) = -\dfrac{1\,000}{r_1^3} <_{\text{immer}} 0$; da $r_1 > 0$

d.h. $G(r_1; r_2)$ hat in (7,07;3,54) ein globales Maximum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$G(7{,}07; 3{,}54) = 400 - 10 \cdot 7{,}07 - \dfrac{500}{7{,}07} - 200 = 58{,}58$

d.h. es müssen 7,07 ME von R_1 und 3,54 ME von R_2 verbraucht werden, um den maximalen Gewinn von 58,58 GE zu erzielen.

b) $G(r_1; r_2) \stackrel{!}{=}$ maximal unter NB: $x = 10$ und $10r_1 + 20r_2 = 150$

Die Nebenbedingungen liefern zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{array}{crcll}
\text{I} & 25 & = & r_1 \cdot r_2 & \Rightarrow r_2 = \frac{25}{r_1} \\
\text{II} & 150 & = & 10r_1 + 20r_2 & \\
\hline
\text{II} & 150 & = & 10r_1 + 20 \cdot \frac{25}{r_1} & \\
 & 150 & = & 10r_1 + \dfrac{500}{r_1} & \mid \cdot r_1 \\
 & 150r_1 & = & 10r_1^2 + 500 & \mid -150r_1 \\
 & 0 & = & 10r_1^2 - 150r_1 + 50 & \mid \div 10 \\
 & 0 & = & r_1^2 - 15r_1 + 50 & \\
 & r_1 & = & 10 \text{ oder } r_1 = 5 &
\end{array}$$

d.h. $(r_1; r_2) = (10; 2{,}5)$ oder $(5; 5)$

$G(10; 2{,}5) = 400 - 10 \cdot 10 - 50 - 200 = 50$

$G(5; 5) = 400 - 10 \cdot 5 - 100 - 200 = 50$

d.h. der Gewinn ist maximal mit 50 GE, wenn von 10 ME von R_1 und 2,5 ME von R_2 bzw. jeweils 5 ME von R_1 und R_2 eingesetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 6

Simplexalgorithmus:

1.	x_1	x_2	x_3	
e_1	1	2	1	4
e_2	2	2	$\boxed{4}$	8
e_3	2	1	1	4
	-2	-2	-3	0

2.	x_1	x_2	e_2	
e_1	$1/2$	$3/2$	$-1/4$	2
x_3	$1/2$	$1/2$	$1/4$	2
e_3	$\boxed{3/2}$	$1/2$	$-1/4$	2
	$-1/2$	$-1/2$	$3/4$	6

3.	e_3	x_2	e_2	
e_1	$-1/3$	$\boxed{4/3}$	$-1/6$	$4/3$
x_3	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	$4/3$
x_1	$2/3$	$1/3$	$-1/6$	$4/3$
	$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$20/3$

4.	e_3	e_1	e_2	
x_2	$-1/4$	$3/4$	$-1/8$	1
x_3	$-1/4$	$-1/4$	$3/8$	1
x_1	$3/4$	$-1/4$	$-1/8$	1
	$1/4$	$1/4$	$3/4$	7

Die optimale Lösung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit optimalem Zielfunktionswert } Z = 7$$