Mathematik-Klausur vom 12. Juli 2005

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Int. Bus.:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 3,4	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Preis-Absatz Funktion: $p(x) = 48 - 4x;\ \ x \in [0; 12]$

1. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.
2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{3x^2 + 12x - 15}{7x + 35}$

c) Geben Sie die lineare Funktion/Gerade $f(x)$ an, für die gilt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & f(7) & = & 2 \\ \text{II} & f(21) & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2

Ein Unternehmen produziert vier Güter P_1, P_2, P_3, P_4 aus drei Rohstoffen R_1, R_2, R_3. Der Bedarf an Rohstoffen zur Herstellung je einer Mengeneinheit (ME) der Endprodukte ist der folgenden Produktionsmatrix zu entnehmen:

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	1	2	4	3
R_2	2	1	0	4
R_3	3	1	2	2

Von Rohstoff R_1 stehen 1 000 ME, von Rohstoff R_2 stehen 1 400 ME und von Rohstoff R_3 stehen 2 000 ME zur Verfügung. Bei der Produktion sollen alle Rohstoffvorräte vollständig aufgebraucht werden.

a) Formulieren Sie den beschriebenen Sachverhalt als Gleichungssystem und geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

b) Geben Sie alle nicht negativen (ökonomisch sinnvollen) Lösungen an.

c) Es sollen nur ganzzahlige Stückzahlen der Güter hergestellt werden.

1. Geben Sie zwei ganzzahlige nicht negative Lösungen an.
2. Wie viele ganzzahlige nicht negative Lösungen gibt es? (Begründung!)

Aufgabe 3
Die Geschäftsführerin einer GmbH schließt zur Altersvorsorge eine Rentenversicherung bei einem Versicherungsunternehmen ab. Die Geschäftsführerin zahlt jährlich 3 000 € ein, die erste Einzahlung erfolgt am 35. Geburtstag, die letzte Einzahlung soll an ihrem 65. Geburtstag erfolgen.

a) Welches Kapital hat sich durch diese Einzahlungen am 65. Geburtstag der Geschäftsführerin bei dem Versicherungsunternehmen angesammelt, wenn von einem Zins von 5,3 % p.a. ausgegangen wird? (In dem Zins von 5,3 % sind enthalten Garantiezins, Überschussbeteiligung und das von der Versicherung übernommene Risiko.)

b) Für die Auszahlungsphase sieht die Rentenversicherung eine monatliche nachschüssige Zahlweise vor, wobei die erste Rentenauszahlung einen Monat nach der letzten Einzahlung erfolgen soll. Welche monatliche Rentenzahlung ergibt sich daraus bei 5,3 % Jahreszinsen, wenn von einer Rentenauszahlung von zwanzig Jahren ausgegangen wird?

c) Aufgrund der schlechten Lage auf dem Kapitalmarkt teilt das Versicherungsunternehmen der Geschäftsführerin mit, dass in den ersten zehn Jahren der Einzahlungsphase mit einer Verzinsung von 5,3 % p.a. kalkuliert werden kann, in den restlichen Jahren der Einzahlungsphase der Zins allerdings auf 4,9 % p.a. abgesenkt werden muss. Welches Kapital hat sich am 65. Geburtstag der Geschäftsführerin durch die Einzahlungen bei dem Versicherungsunternehmen angesammelt?

Aufgabe 4
Bei einem Privatverleiher wurden zweimal 8 000 € ausgeliehen, zunächst am 28.02.2003 und dann am 30.06.2004. Die Konditionen sind bankmäßige gemischte Verzinsung bei einem Jahreszins von 9,6 %.

a) Welcher Betrag wäre insgesamt am 31.08.2007 zurückzuzahlen?

b) Welche Zwischenrückzahlung am 31.12.2005 würde die Rückzahlung am 31.08.2007 auf 16 000 € reduzieren?

c) Nach wie vielen Tagen im Jahr 2006 ist die Schuld auf 20 000 € angestiegen?

Aufgabe 5
Bestimmen Sie das globale/absolute Maximum der folgenden Funktion:

$$f(x, y) = 10x + 22y + 527 \ \ ; x, y > 0$$

unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = 146$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ an.

b) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion (Notwendige Bedingung).

d) Überprüfen Sie die Hinreichende Bedingung.

Aufgabe 6

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \overset{!}{=} \text{maximal}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{unter} & \text{I} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 4 \\ & \text{II} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 8 \\ & \text{III} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 5 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x(p) = 12 - 0{,}25p \; ; p \in [0; 48]$

b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{3x^2 + 12x - 15}{7x + 35} = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{3(x+5)(x-1)}{7(x+5)} = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{3(x-1)}{7} = -\dfrac{18}{7}$

c) $f(x) = a + b \cdot x$

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 2 & = & a + b \cdot 7 & \\ \text{II} & 0 & = & a + b \cdot 21 & \\ \hline \text{I-II} & 2 & = & -14b & \Rightarrow b = -1/7 \\ \text{II} & 0 & = & a - \frac{1}{7} \cdot 21 & \Rightarrow a = 3 \end{array}$$

d.h. $f(x) = 3 - \dfrac{x}{7}$

Lösung zu Aufgabe 2

x_1 = ME von P_1

x_2 = ME von P_2

x_3 = ME von P_3

x_4 = ME von P_4

a) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 1\,000 \\ \text{II} & 2x_1 + x_2 + 4x_4 & = & 1\,400 \\ \text{III} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 2\,000 \end{array}$$

Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
1	$\boxed{1}$	2	4	3	1 000	
2	2	1	0	4	1 400	
3	3	1	2	2	2 000	
4	1	2	4	3	1 000	1
5	0	$\boxed{-3}$	−8	−2	−600	2−2 · 1
6	0	−5	−10	−7	−1 000	3−3 · 1
7	1	2	4	3	1 000	4
8	0	−3	−8	−2	−600	5
9	0	0	10	−11	0	3 · 6−5 · 5

9 $10x_3 - 11x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 1{,}1x_4$

8 $-3x_2 - 8 \cdot 1{,}1x_4 - 2x_4 = -600 \Rightarrow x_2 = 200 - 3{,}6x_4$

7 $x_1 + 2 \cdot (200 - 3{,}6x_4) + 4 \cdot 1{,}1x_4 + 3x_4 = 1\,000 \Rightarrow x_1 = 600 - 0{,}2x_4$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 600 - 0{,}2x_4 \\ 200 - 3{,}6x_4 \\ 1{,}1x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in \mathbb{R} \}$$

b) Nicht negative Lösungen:

1.) $x_1 = 600 - 0{,}2x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 3\,000$

2.) $x_2 = 200 - 3{,}6x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 55{,}\overline{5}$

3.) $x_3 = 1{,}1x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \geq 0$

4.) $x_4 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 600 - 0{,}2x_4 \\ 200 - 3{,}6x_4 \\ 1{,}1x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in [0\,;\ 55{,}\overline{5}] \}$$

c)

1. $x_4 = 0$; d.h. aus dem Vorrat lassen sich 600 ME von P_1, 200 ME von P_2, 0 ME von P_3 und 0 ME von P_4 herstellen.
   $x_4 = 10$; d.h. aus dem Vorrat lassen sich 598 ME von P_1, 164 ME von P_2, 11 ME von P_3 und 10 ME von P_4 herstellen.

2. Ganzzahlige nicht negative Lösungen für $x_4 \in [0\,;\ 55{,}\overline{5}]$:
   1.) $x_1 = 600 - 0{,}2x_4 \in \mathbb{Z}_0^+ \Rightarrow x_4 = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55$
   2.) $x_2 = 200 - 3{,}6x_4 \in \mathbb{Z}_0^+ \Rightarrow x_4 = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55$
   3.) $x_3 = 1{,}1x_4 \in \mathbb{Z}_0^+ \Rightarrow x_4 = 0, 10, 20, 30, 40, 50$
   4.) $x_4 \in \mathbb{Z}_0^+ \Rightarrow x_4 = 0, 1, 2, \ldots, 55$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 600 - 0{,}2x_4 \\ 200 - 3{,}6x_4 \\ 1{,}1x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in \{0; 10; 20; 30; 40; 50\} \}$$

d.h. es gibt sechs ganzzahlige nicht negative Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Guthaben der nachschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$R_{31} = 3\,000 \cdot \frac{1{,}053^{31} - 1}{0{,}053} = 224\,020{,}28$$

d.h. das Kapital beträgt 224 020,28 €

Die Einzahlungen können auch als vorschüssige Rente gerechnet werden, müssen dann aber noch ein Jahr abgezinst werden:

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am Vortag des 66. Geburtstags:

$$R'_{31} = 3\,000 \cdot 1{,}053 \cdot \frac{1{,}053^{31} - 1}{0{,}053} = 235\,893{,}3536$$

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\frac{235\,893{,}3536}{1{,}053} = 224\,020{,}28$$

b) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:

$$224\,020{,}28 = r_J \cdot \frac{1{,}053^{20} - 1}{0{,}053} \cdot \frac{1}{1{,}053^{20}} \Rightarrow r_J = 18\,436{,}04$$

monatliche nachschüssige Rente r_M:

$$18\,436{,}04 = r_M(12 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}053) \Rightarrow r_M = 1\,499{,}90$$

d.h. die monatlichen Auszahlungen betragen 1 499,90 €.

c) Je nachdem, ob die Zahlungen über 3000 € als vorschüssig oder nachschüssig aufgefasst werden, sind aufgrund der unpräzisen Angabe „die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase“ die Ergebnisse unterschiedlich.

1. Möglichkeit: die Zahlungen über 3000 € sind nachschüssige Zahlungen. Dann sind die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase die Jahre einen Tag nach dem 34. Geburtstag bis zum 44. Geburtstag. Die Lösung lautet dann wie folgt:

Guthaben der nachschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\begin{aligned} R_{31} &= 3\,000 \cdot \frac{1{,}053^{10} - 1}{0{,}053} \cdot 1{,}049^{21} + 3\,000 \cdot \frac{1{,}049^{21} - 1}{0{,}049} \\ &= 104\,496{,}41 + 105\,965{,}56 \\ &= 210\,461{,}97 \end{aligned}$$

d.h. das Kapital beträgt 210 461,97 €.

2. Möglichkeit: die Zahlungen über 3000 € sind vorschüssige Zahlungen. Dann sind die ersten zehn Jahre der Einzahlungsphase die Jahre ab dem 35. Geburtstag bis einen Tag vor dem 45. Geburtstag. Die Lösung lautet dann wie folgt:

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € ein Jahr nach dem 65. Geburtstag:

$$\begin{aligned} R'_{31} &= 3\,000 \cdot 1{,}053 \cdot \frac{1{,}053^{10} - 1}{0{,}053} \cdot 1{,}049^{21} + 3\,000 \cdot 1{,}049 \cdot \frac{1{,}049^{21} - 1}{0{,}049} \\ &= 110\,034{,}70 + 111\,157{,}90 \\ &= 221\,192{,}70 \end{aligned}$$

Guthaben der vorschüssigen Jahresrente über 3 000 € am 65. Geburtstag:

$$\frac{R'_{31}}{1{,}049} = 210\,860{,}50$$

d.h. das Kapital beträgt 210 860,50 €.
Der Unterschied in den beiden Möglichkeiten besteht darin, ob der Zins in dem Jahr vom 44. bis zum 45. Geburtstag 5,3 oder 4,9 % beträgt.

Lösung zu Aufgabe 4

a)
$$8\,000 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^3 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096)$$
$$+8\,000 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^2 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096) \quad = 22\,818{,}37$$

d.h. es sind 22 818,37 € zurückzuzahlen.

b) $x \cdot 1{,}096 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}096) = 22\,818{,}37 - 16\,000 \Rightarrow x = 5\,846{,}94$
d.h. die Zwischenrückzahlung müsste 5 846,94 € betragen.

c) Schuld am 31.12.2005:
$$8\,000 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096^2 + 8\,000 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}096) \cdot 1{,}096 = 19\,567{,}37$$
$$19\,567{,}37 \cdot (1 + \frac{x}{360} \cdot 0{,}096) = 20\,000 \Rightarrow x = 82{,}9$$
d.h. nach 83 Tagen (d.h. am 24.03.2006)

Lösung zu Aufgabe 5

a) $L(x, y, \lambda) = 10x + 22y + 527 + \lambda(x^2 + y^2 - 146) \;\; ; x, y > 0$

b)
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 10 + 2\lambda x \\ L_y(x,y,\lambda) &= 22 + 2\lambda y \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 146 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{array}{lrcll}
\mathrm{I} & 0 & = & 10 + 2\lambda x & \\
\mathrm{II} & 0 & = & 22 + 2\lambda y & \\
\mathrm{III} & 0 & = & x^2 + y^2 - 146 & \\
\hline
y \cdot \mathrm{I} & 0 & = & 10y + 2\lambda xy & \\
x \cdot \mathrm{II} & 0 & = & 22x + 2\lambda xy & \\
\hline
y \cdot \mathrm{I} - x \cdot \mathrm{II} & 0 & = & 10y - 22x & \Rightarrow y = 2{,}2x \\
\hline
\mathrm{III} & 0 & = & x^2 + (2{,}2x)^2 - 146 & \\
 & 146 & = & x^2 + 4{,}84x^2 & \\
 & 146 & = & 5{,}84x^2 & \\
 & 25 & = & x^2 & \Rightarrow x = -5 \notin \text{Def.bereich oder } x = +5 \\
 & y & = & 2{,}2 \cdot 5 = 11 & \\
\hline
\mathrm{I} & 0 & = & 10 + 2 \cdot \lambda \cdot 5 & \Rightarrow \lambda = -1
\end{array}$$

d) $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$
$L_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$

$L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$
Hinreichende Bedingung:
$D = L_{xx}(x,y,-1) \cdot L_{yy}(x,y,-1) - [L_{xy}(x,y,-1)]^2 = (-2)\cdot(-2) - 0 = 4 >_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x,y,-1) = -2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(x,y) = (5;11)$ ein globales Maximum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 6
Simplex-Algorithmus

1	x_1	x_2	x_3	
e_1	1	2	$\boxed{2}$	4
e_2	2	2	3	8
e_3	2	3	1	5
	-3	-2	-4	0

2	x_1	x_2	e_1	
x_3	$1/2$	1	$1/2$	2
e_2	$1/2$	-1	$-3/2$	2
e_3	$\boxed{3/2}$	2	$-1/2$	3
	-1	2	2	8

3	e_3	x_2	e_1	
x_3	$-1/3$	$1/3$	$2/3$	1
e_2	$-1/3$	$-5/3$	$-4/3$	1
x_1	$2/3$	$4/3$	$-1/3$	2
	$2/3$	$10/3$	$5/3$	10

Optimale Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Optimaler Z-Wert $= 10$