Mathematik-Klausur vom 15.07.2008 und Finanzmathematik-Klausur vom 08.07.2008

Studiengang BWL PO 1997:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI PO 2001:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang BWL PO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI PO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 6,7	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 6,7	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE PO 2004:	Aufgaben 6,7	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 6,7	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p_0 = 5$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 18 - 2p \quad ; p \in [0; 9]$$

b) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^x \quad ; x \in \mathbb{R}$$

c) Berechnen Sie:

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 + 16x + 32}{x^2 + 2x - 8}$$

Aufgabe 2

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess beträgt der Rohstoffbedarf (in ME) der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 für jeweils eine Mengeneinheit der Zwischenprodukte Z_1, Z_2:

	Z_1	Z_2
R_1	2	3
R_2	3	2
R_3	1	1

Der Bedarf (in ME) an Zwischenprodukten für jeweils eine Mengeneinheit der Endprodukte E_1, E_2, E_3 beträgt:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	1
Z_2	1	3	2

Als Vorrat stehen von den drei Rohstoffen folgende Mengeneinheiten zur Verfügung:

	Vorrat
R_1	530
R_2	470
R_3	200

Um zu klären, wie viele Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, gehen Sie bitte wie folgt vor:

a) Berechnen Sie den (Gesamt-)Bedarf (in ME) an Rohstoffen für jeweils eine Mengeneinheit der Endprodukte.

b) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf, wenn sämtlicher Vorrat verbraucht werden soll.

   1. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.
   2. Geben Sie alle nicht negativen Lösungen an.
   3. Geben Sie alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen an.

Aufgabe 3
Ein Unternehmen produziert und vertreibt zwei Güter A und B. Gut A erzielt am Markt einen Stückpreis von 90 Geldeinheiten und Gut B einen Stückpreis von 30 Geldeinheiten. Die Kosten ergeben sich aus den Produktions- und Absatzmengen x_1 (Gut A) und x_2 (Gut B) durch:

$$K(x_1, x_2) = x_1^3 + 12x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 10 \ ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

a) Bestimmen Sie das Gewinn-maximale Produktionsprogramm. (Runden Sie ggf. Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

b) Bestimmen Sie das Kosten-günstigste Produktionsprogramm, wenn von Gut A und von Gut B zusammen zehn Mengeneinheiten produziert werden sollen. (Runden Sie ggf. Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

Aufgabe 4
Für den Erwerb eines Pkw stehen zwei verschiedene Finanzierungsmodelle bei 5,2 % Jahreszinsen zur Auswahl:

a) Modell A

   - 4 000 Euro Sofortzahlung
   - zwei Jahre lang nachschüssige Quartalsraten in Höhe von 900 Euro
   - am Ende des 2. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 3 000 Euro

   Wie hoch ist der Barwert des Finanzierungsmodells A?

b) Modell B

   - 3 000 Euro Sofortzahlung
   - drei Jahre lang monatlich vorschüssig 200 Euro
   - am Ende des 3. Jahres eine Restzahlung in Höhe von 4 000 Euro

   Beurteilen Sie anhand der Berechnung des Barwerts des Finanzierungsmodells B, welches Modell vorteilhafter ist.

c) Der Interessent entscheidet sich für das Modell B. Für die Restzahlung aus dem Modell B nach drei Jahren in Höhe von 4 000 Euro möchte er von Anfang an drei Jahre lang am Ende eines jeden Monats Geld ansparen. Wie viel Euro muss er bei 5,2 % Jahreszinsen monatlich einzahlen, um die Restzahlung davon begleichen zu können?

Aufgabe 5

Die Gesamtkosten zur Herstellung der Menge x eines Produktes in einem Betrieb könmnen mit Hilfe der folgenden Kostenfunktion berechnet werden:

$$K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}03x^2 + 3x + 308 \ ; x > 0$$

Die wöchentliche Kapazitätsgrenze der Produktion liege bei $x = 75$ Mengeneinheiten (ME).

a) Bestimmen Sie die Funktion der variablen Stückkosten (durchschnittlichen variablen Kosten).

b) Bestimmen Sie die wöchentliche Grenzkostenfunktion und interpretieren Sie diese an der Stelle $x_0 = 10$.

c) Bestimmen Sie die Gewinn-maximale Produktionsmenge unter der Voraussetzung, dass zwischen Preis und Absatzmenge der folgende Zusammenhang besteht:

$$p(x) = 103 - 0{,}03x$$

(Runden Sie ggf. Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

Aufgabe 6

Ein Sparer legt 20 000 Euro bei seiner Bank am 31.03.2006 an bei vierteljährlicher Verzinsung zum relativen Zins und einem nominellen Jahreszins von 4%. Im Laufe der Jahre kommt es zu folgenden Kapitalbewegungen:

- Einzahlung von 3 000 Euro am 01.01.2007
- Abhebung von 5 000 Euro am 30.09.2008
- Abhebung von 4 000 Euro am 01.04.2009
- Einzahlung von 2 000 Euro am 30.06.2010

a) Wie hoch ist die effektive Verzinsung, die der Sparer pro Jahr erhält?

b) Über welches Guthaben könnte der Sparer am 31.12.2010 verfügen?

c) Am Ende welchen Quartals übersteigt das Guthaben des Sparers zum ersten Mal den Betrag von 25 000 Euro?

Aufgabe 7

Eine mit 9% p.a. zu verzinsende Schuld in Höhe von 200 000 Euro soll vom Ende des ersten Jahres an durch jährliche Zahlungen in Höhe von 20 000 Euro zurück gezahlt werden.

a) Wie hoch ist der erste Tilgungssatz und wie hoch ist der erste Tilgungsbetrag?

b) Wie viele Annuitäten können in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch wären monatlich vorschüssige Rückzahlungensbeträge bei nach wie vor 9% Jahreszinsen ausgefallen? (Erster monatlicher Rückzahlungsbetrag fällig bei Kreditaufnahme.)

d) Der Schuldner ist in der Lage, mit der 14. Annuität noch zusätzlich 50 000 Euro zu überweisen. Ferner steigt zu Beginn des 15. Jahres der Zins auf 10% p.a. Wie hoch werden die Annuitäten anschließend sein, wenn die Restschuld mit fünf gleich hohen Annuitäten beglichen werden soll?

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x'(p) = -2$
$\epsilon_x(5) = x'(5) \cdot \frac{5}{x(5)} = (-2) \cdot \frac{5}{8} = -1{,}25$
d.h. wird der Preis von 5 GE um 1% erhöht, so sinkt der Absatz um 1,25 %.

b) Produktregel
$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + (x^3 + 1) \cdot e^x$

c) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{2x^2 + 16x + 32}{x^2 + 2x - 8} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{2(x+4)(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{2(x+4)}{(x-2)} = \frac{0}{-6} = 0$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gesamtbedarf $M{=}A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 8 \\ 8 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) e_1=ME von E_1
e_2=ME von E_2
e_3=ME von E_3

1. Gleichungssystem:
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 7e_1 + 11e_2 + 8e_3 & = & 530 \\ \text{II} & 8e_1 + 9e_2 + 7e_3 & = & 470 \\ \text{III} & 3e_1 + 4e_2 + 3e_3 & = & 200 \end{array}$$
2. Gaußalgorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	7	11	8	530	
2	8	9	7	470	
3	$\boxed{3}$	4	3	200	
4	3	4	3	200	3
5	0	$\boxed{5}$	3	190	$3 \cdot 1 - 7 \cdot 3$
6	0	-5	-3	-190	$3 \cdot 2 - 8 \cdot 3$
7	3	4	3	200	4
8	0	5	3	190	5
9	0	0	0	0	6+5

8 $5e_2 + 3e_3 = 190 \Rightarrow e_2 = 38 - 0{,}6e_3$

7 $3e_1 + 4(38 - 0{,}6e_3) + 3e_3 = 200 \Rightarrow e_1 = 16 - 0{,}2e_3$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 16 - 0{,}2e_3 \\ 38 - 0{,}6e_3 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \mathbb{R}\}$$

3. Nicht negative Lösungen:
   $e_1 = 16 - 0{,}2e_3 \geq 0 \Rightarrow 16 \geq 0{,}2e_3 \Rightarrow 80 \geq e_3$
   $e_2 = 38 - 0{,}6e_3 \geq 0 \Rightarrow 38 \geq 0{,}6e_3 \Rightarrow 63{,}\overline{3} \geq e_3$
   $e_3 \geq 0$
   d.h. $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 16 - 0{,}2e_3 \\ 38 - 0{,}6e_3 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in [0; 63{,}\overline{3}]\}$

4. Nicht negative ganzzahlige Lösungen:
   Damit $0{,}2e_3$ eine ganze Zahl ist, muss e_3 ein Vielfaches der Zahl 5 sein; d.h. $e_3 = 0, 5, 10, 15, 20, \ldots$
   Damit $0{,}6e_3$ eine ganze Zahl ist, muss e_3 ein Vielfaches des Bruchs 5/3 sein; d.h. $e_3 = 0, 5/3, 10/3, 15/3 = 5, 20/3, 25/3, 30/3 = 10, 35/3, \ldots$
   Damit e_3 eine ganze Zahl ist, muss e_3 aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sein.
   d.h. $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 16 - 0{,}2e_3 \\ 38 - 0{,}6e_3 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots, 60\}\}$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $U(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 90x_1 + 30x_2$
   $G(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) - K(x_1, x_2) = -x_1^3 - 12x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 + 90x_1 + 30x_2 - 10$
   $G_{x_1}(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 24x_1 - 4x_2 + 90$ $\quad G_{x_1x_1}(x_1, x_2) = -6x_1 - 24$
   $G_{x_2}(x_1, x_2) = -2x_2 - 4x_1 + 30$ $\quad G_{x_2x_2}(x_1, x_2) = -2$
   $G_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -4$

   Notwend. Bed.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{I} & 0 & = & -3x_1^2 - 24x_1 - 4x_2 + 90 & \\
\text{II} & 0 & = & -2x_2 - 4x_1 + 30 & \\
\hline
\text{I} - 2 \cdot \text{II} & 0 & = & -3x_1^2 - 16x_1 + 30 & \mid \div(-3) \\
 & 0 & = & x_1^2 + \frac{16}{3} - 10 & \mid pq\text{-Formel} \\
 & x_1 & = & -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 10} & \\
 & x_1 & = & 1{,}47 \text{ oder } \underbrace{x_1 = -6{,}80}_{\notin \text{ Def.Bereich}} & \\
\text{II} & 0 & = & -2x_2 - 4 \cdot 1{,}47 + 30 & \Rightarrow x_2 = 12{,}06
\end{array}
$$

Hinreichende Bed.
$D(x_1, x_2) = (-6x_1 - 24) \cdot (-2) - (-4)^2 = 12x_1 + 32 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_1x_1}(x_1, x_2) = -6x_1 - 24 <_{\text{immer}} 0$
d.h. (1,47; 12,06) glob. Max
d.h. das optimale Produktionsprogramm beträgt 1,47 ME von Gut A und 12,06 ME von Gut B.

b) $K(x_1, x_2) \stackrel{!}{=}$ min unter NB $x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 10 - x_1$
$K(x_1) = x_1^3 + 12x_1^2 + (10 - x_1)^2 + 4x_1(10 - x_1) + 10$
$K(x_1) = x_1^3 + 9x_1^2 + 20x_1 + 110$
$K'(x_1) = 3x_1^2 + 18x_1 + 20 \geq 0_{\text{immer}} \Rightarrow K(x_1)$ ist monoton steigend
d.h. das globale Min liegt am unteren Rand $x_1 = 0$ des Definitionsbereichs
Daraus folgt: $x_2 = 10$
d.h. das optimale Produktionsprogramm beträgt 0 ME von Gut A und 10 ME von Gut B.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 4000 + 900(4 + \dfrac{3}{2} \cdot 0{,}052) \cdot \dfrac{1{,}052^2 - 1}{0{,}052} \cdot \dfrac{1}{1{,}052^2} + \dfrac{3000}{1{,}052^2} = 13\,515{,}87$
d.h. der Barwert des Modells A beträgt 13,515,87 Euro.

b) $K_0 = 3000 + 200(12 + \dfrac{13}{2} \cdot 0{,}052) \cdot \dfrac{1{,}052^3 - 1}{0{,}052} \cdot \dfrac{1}{1{,}052^3} + \dfrac{4000}{1{,}052^3} = 13\,130{,}46$
d.h. der Barwert des Modells B ist mit 13 130,46 Euro kleiner als der Barwert von Modell A. Somit ist Modell B vorteilhafter.

c) $4000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}052^3 - 1}{0{,}052} \Rightarrow r_J = 1\,266{,}34$
$1\,266{,}34 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}052) \Rightarrow r_M = 103{,}07$
d.h. es sind monatlich nachschüssig 103,07 Euro einzuzahlen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $k_v(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}03x + 3$

b) $K'(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}06x + 3$
$K'(10) = 8{,}4$
d.h. werden statt 10 ME des Gutes jetzt 11 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 8,4 GE.

c) $U(x) = 103x - 0{,}03x^2$
$G(x) = -0{,}02x^3 + 100x - 308$
$G'(x) = -0{,}06x^2 + 100$
$G''(x) = -0{,}12x$
Notwend. Bed.
$0 = -0{,}06x^2 + 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{100}{0{,}06}} = \pm 40{,}82$
Hinreichende Bed.
$G''(x) = -0{,}12 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 40{,}82$ glob Max, da $x = -40{,}82 \notin$ Def.bereich.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^4 = 1{,}040604$
d.h. der Effektivzins beträgt 4,0604 % pro Jahr.

b) *1. Lösungsweg:*
$K_{4,75} = 20\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{4,75\cdot 4} + 3\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot 4} - 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{2,25\cdot 4} - 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{1,75\cdot 4} + 2\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{0,5\cdot 4} =$
$20\,000 \cdot 1{,}01^{19} + 3\,000 \cdot 1{,}01^{16} - 5\,000 \cdot 1{,}01^{9} - 4\,000 \cdot 1{,}01^{7} + 2\,000 \cdot 1{,}01^{2} = 19\,963{,}15$
d.h. das Guthaben am 31.12.2010 beträgt 19 963,15 Euro.
2. Lösungsweg:
$K_{4,75} = 20\,000 \cdot 1{,}040604^{4,75} + 3\,000 \cdot 1{,}040604^{4} - 5\,000 \cdot 1{,}040604^{2,25} - 4\,000 \cdot 1{,}040604^{1,75} + 2\,000 \cdot 1{,}040604^{0,5} = 19\,963{,}15$

c) Guthaben am 31.12.2006: $20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{0,75\cdot 4} = 20\,606{,}02$

Guthaben am 01.01.2007: $20\,606{,}02 + 3\,000 = 23\,606{,}02$

$n = \dfrac{\ln \frac{25\,000}{23\,606{,}02}}{\ln 1{,}040604} = 1{,}441511$ Jahre und $1{,}441511 \cdot 4 = 5{,}8$ Quartale

31.12.2006 plus sechs Quartale = 30.06.2008
d.h. am 30.06.2008 übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 25 000 Euro

Probe:
$20\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^9 + 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^6 = 25\,058{,}27$

Lösung zu Aufgabe 7

a) $\dfrac{20\,000}{200\,000} = 0{,}1 = 10\%$ Prozentannuität
$10\% - 9\% = 1\%$
$200\,000 \cdot 0{,}01 = 2\,000$
d.h. der erste Tilgungssatz beträgt 1%, die erste Tilgungsrate beträgt 2 000 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{20\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln(1{,}09)} = 26{,}7$
d.h. es sind 26 volle Annuitäten zu zahlen.

c) $20\,000 = r'_M(12 + \dfrac{13}{2} \cdot 0{,}09) \Rightarrow r'_M = 1\,589{,}19$
d.h. monatlich vorschüssige Raten betragen 1 589,19 Euro.

d) $K_{14} = 200\,000 \cdot 1{,}09^{14} - 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}09^{14} - 1}{0{,}09} = 147\,961{,}62$
$147\,961{,}62 - 50\,000 = 97\,961{,}62$
$A = 97\,961{,}62 \cdot 1{,}1^5 \cdot \dfrac{0{,}1}{1{,}1^5 - 1} = 25\,842{,}03$
d.h. die Annuitäten betragen 25 842,03 Euro.