Mathematik-Klausur vom 17.07.2009 und Finanzmathematik-Klausur vom 16.07.2009

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 7x - 14}$$

b) Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p_0 = 10$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 120 - 5p \;\; ; p \in [0; 24]$$

c) Bestimmen Sie die Sattelstelle der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 12xy + 23 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

Ein Produkt wird an zwei verschiedenen Standorten produziert. Aufgrund unterschiedlicher Fertigungsverfahren sind die Kosten bzw. die Stückkosten für das gleiche Produkt in den beiden Fertigungsbetrieben verschieden.

Bei der Herstellung von x_1 ME des Produktes in Betrieb 1 fallen folgende Kosten an:

$$K_1(x_1) = 100 + x_1^2 \;\; ; x_1 \geq 0$$

Bei der Herstellung von x_2 ME des Produktes in Betrieb 2 fallen folgende Kosten an:

$$K_2(x_2) = 110 + x_2^2 - 8x_2 \;\; ; x_2 \geq 0$$

a) Berechnen Sie mithilfe der Lagrange-Methode die kostengünstigste Aufteilung der Produktmengen auf beide Betriebe, wenn in den nächsten sechs Monaten genau 100 ME des Produktes hergestellt werden sollen.

b) Geben Sie die Grenzkosten des Produktes in beiden Betrieben an.

c) Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten in beiden Betrieben an der Stelle $x_1 = 48$ und $x_2 = 52$.

Aufgabe 3

Eine Unternehmung produziert seine Güter in einem zweistufigen Produktionsprozess. In der ersten Stufe werden aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 zwei Zwischenprodukte hergestellt, in der zweiten Stufe aus den beiden Zwischenprodukten drei Endprodukte. P sei als Produktionsmatrix (Direktbedarf) der ersten Stufe gegeben durch:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Q als Produktionsmatrix (Direktbedarf) der zweiten Stufe durch:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Von Rohstoff R_1 stehen in der kommenden Periode 40 Mengeneinheiten und von Rohstoff R_2 ebenfalls 40 Mengeneinheiten zur Verfügung.

a) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Produktionsmengen für die drei Endprodukte. Dabei sind Produktionsmengen ökonomisch sinnvoll, wenn sie nicht negativ sind.

b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Produktionsmengen für die drei Endprodukte. Dabei sind Produktionsmengen ökonomisch sinnvoll, wenn sie nicht negativ und ganzzahlig sind.

c) Wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte werden bei den ganzzahligen Lösungen aus b) produziert?

Aufgabe 4

Frau X. möchte bei 2% Jahreszinsen durch vorschüssig monatliche Einzahlungen auf einen Neuwagen ansparen. Der Neuwagen soll am 31.12.2012 zu einem Preis von 20 000 Euro erworben werden. Frau X. rechnet damit, für den Verkauf ihres Gebrauchtwagens ebenfalls am 31.12.2012 noch 5 200 Euro zu erhalten. Diese 5 200 Euro möchte sie vollständig für den Neuwagenkauf verwenden.

a) Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen, wenn die erste Einzahlung am 01.01.2010 erfolgen soll und die letzte monatliche Einzahlung am 01.12.2012?

b) Im Jahr 2010 zahlt Frau X. die in a) berechneten monatlichen Beträge ein. Am 31.12.2010 muss sie jedoch unvorhergesehen 1 000 Euro aus dem bisher Ersparten abheben. Wie hoch müssen in den beiden Jahren 2011 und 2012 ihre monatlichen Einzahlungen ausfallen?

c) In den beiden Jahren 2010 und 2011 zahlt Frau X. die in a) berechneten monatlichen Beträge ein. Am 31.12.2011 gewinnt sie unverhofft 650 Euro im Lotto, die sie auf dieses Sparkonto einzahlt. Wie hoch müssen im Jahr 2012 ihre monatlichen Einzahlungen sein?

Aufgabe 5

Bei relativ gemischter Verzinsung zu 4% pro Jahr besteht die folgende Zahlungsverpflichtung:

- 1 000 Euro am 31.03.2010
- 2 000 Euro am 31.08.2011
- 3 000 Euro am 31.12.2014

Die Schulden sollen zurückgezahlt werden durch

a) eine einmalige Zahlung am 31.07.2009. Wie hoch ist die einmalige Rückzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

b) zwei gleich hohe Beträge am 31.03.2010 und am 31.12.2014. Wie hoch sind die beiden Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

c) eine Zahlung über 2 500 Euro am 31.05.2013 und eine Restzahlung am 31.12.2014. Wie hoch ist die Restzahlung, wenn der Bewertungsstichtag der 31.07.2009 ist?

Aufgabe 6

Ein Handwerker A. hat seinen Betrieb aus Altersgründen zum 01.01.2007 an einen jungen Nachfolger B. übergeben. Für die Übergabe des gGeschäfts wird eine Kaufpreis in Form einer monatlich nachschüssigen Rente in Höhe von 2 000 GE geleistet. Die Rente beginnt mit der Januarzahlung für das Jahr 2007 und endet mit der Dezemberzahlung für das Jahr 2011. Gehen Sie bei allen nachfolgenden Berechnungen von einem Rechnungszins von 5% p.a. aus.

a) Wie hoch ist der Barwert der Rente?

b) Aufgrund der Wirtschaftskrise kann B. die Rentenzahlungen ab 01.01.2009 nicht mehr in voller Höhe leisten. Er schlägt A. die folgenden veränderten Zahlungsbedingungen vor. Anstelle der noch ausstehenden Rentenzahlungen soll eine wertgleiche, bis Ende 2014 laufende monatlich nachschüssige Rente gezahlt werden. Wie hoch sind diese monatlichen Zahlungen?

c) Aufgrund der Wirtschaftskrise kann B. die Rentenzahlungen ab 01.01.2009 nicht mehr in voller Höhe leisten. Er schlägt A. die folgenden veränderten Zahlungsbedingungen vor. Anstelle der noch ausstehenden Rentenzahlungen soll eine monatlich nachschüssige Rente wie folgt gezahlt werden:

   1. Monatliche Zahlungen bis Ende Dezember 2011
   2. Höhe der monatlichen Zahlungen im Jahr 2009: 1 900 GE

3. Erhöhung der monatlichen Zahlungen zum 01.01.2010 um $100 \cdot x\%$
4. Nochmalige Erhöhung der monatlichen Zahlungen zum 01.01.2011 um $100 \cdot x\%$

Berechnen Sie den Prozentsatz x unter der Annahme, dass die ursprünglichen und die neuen Rentenzahlungen wertgleich sind.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{7x^2+7x-14} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x+3)}{7(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+3)}{7(x-1)} = \dfrac{1}{-21}$

b) $x'(p) = -5$

$\epsilon_x(10) = x'(10) \cdot \dfrac{10}{x(10)} = (-5) \cdot \dfrac{10}{70} = -0{,}7$

d.h. wird der Preis von 10 GE um 1% erhöht, so sinkt der Absatz um 0,7 %.

c) $f_x(x,y) = 3x^2 - 12y \quad f_{xx}(x,y) = 6x$

$f_y(x,y) = 2y - 12x \quad f_{yy}(x,y) = 2$

$f_{xy}(x,y) = -12$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 0 & = & 3x^2 - 12y \\ \mathrm{II} & 0 & = & 2y - 12x \\ \hline \mathrm{I} + 6\cdot\mathrm{II} & 0 & = & 3x^2 - 72x \end{array} \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 24$$

1. Fall $x = 0 \Rightarrow$ II $0 = 2y \Rightarrow y = 0$

2. Fall $x = 24 \Rightarrow$ II $0 = 2y - 288 \Leftrightarrow y = 144$

d.h. mögliche Sattelstellen sind (0;0) und (24;144).

Hinreichende Bedingung:

$D(x,y) = 6x \cdot 2 - (-12)^2 = 12x - 144$

$D(0;0) = -144 < 0$: d.h. (0;0) Sattelstelle

$D(24;144) = 144 > 0$ d.h. (24;144) keine Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2:

$K(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 + 210 \ \ ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$

a) NB: $x_1 + x_2 = 100$

$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 + 210 + \lambda(x_1 + x_2 - 100)$

$$\begin{array}{rcl rcl} L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) & = & 2x_1 + \lambda & L_{x_1x_1}(x_1,x_2,\lambda) & = & 2 \\ L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) & = & 2x_2 - 8 + \lambda & L_{x_2x_2}(x_1,x_2,\lambda) & = & 2 \\ L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda) & = & x_1 + x_2 - 100 & L_{x_1x_2}(x_1,x_2,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 0 & = & 2x_1 + \lambda \\ \mathrm{II} & 0 & = & 2x_2 - 8 + \lambda \\ \mathrm{III} & 0 & = & 2x_1 + 2x_2 - 100 \Rightarrow x_1 = 100 - x_2 \\ \hline \mathrm{I} - \mathrm{II} & 0 & = & 2x_1 - 2x_2 + 8 = 2\cdot(100 - x_2) - 2x_2 + 8 \\ \mathrm{I} & 0 & = & 96 + \lambda \Rightarrow \lambda = -96 \end{array} \Rightarrow x_2 = \tfrac{208}{4} = 52 \Rightarrow x_1 = 48$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x_1;x_2;-96) = 2 \cdot 2 - (0)^2 = 4 >_{\text{immer}} 0$

$L_{x_1x_1}(x_1; x_1; -96) = 2 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $K(x_1, x_2)$ hat in (48;52) ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung. D.h. es sind 48 ME in Betrieb 1 und 52 ME in Betrieb 2 herzustellen.

b) $K_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$ Grenzkosten in Betrieb 1
$K_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 - 8$ Grenzkosten in Betrieb 2

c) $K_{x_1}(48; 52) = 2 \cdot 48 = 96$
d.h. werden im Betrieb 1 von dem Gut statt 48 ME jetzt 49 ME hergestellt, so steigen die Kosten in Betrieb 1 um etwa 96 GE.
$K_{x_2}(48; 52) = 2 \cdot 52 - 8 = 96$
d.h. werden im Betrieb 2 von dem Gut statt 52 ME jetzt 53 ME hergestellt, so steigen die Kosten in Betrieb 1 um etwa 96 GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

Gesamtbedarf $M = P \cdot Q = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 4 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

a) x_1 = ME von Endprodukt I, x_2 = ME von Endprodukt II, x_3 = ME von Endprodukt III
Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
①	$\boxed{14}$	5	4	40	
②	12	6	4	40	
③	14	5	4	40	①
④	0	24	8	80	14 · ②−12 · ①

② $24x_2 + 8x_3 = 80 \Rightarrow x_2 = \dfrac{80 - 8x_3}{24} = \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}x_3$

① $14x_1 + 5 \cdot (\dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}x_3) + 4x_3 = 40 \Rightarrow 14x_1 = \dfrac{70}{3} - \dfrac{7}{3}x_3 \Rightarrow x_1 = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6}x_3$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{6}x_3 \\ \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Nicht negative Lösungen:
$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{6}x_3 \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3} \geq \frac{1}{6}x_3 \Rightarrow x_3 \leq 10$
$x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 \geq 0 \Rightarrow \frac{10}{3} \geq \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_3 \leq 10$
$x_3 \geq 0$

d.h. $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{6}x_3 \\ \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [0\,;\,10]\}$

b) Ganzzahlige nicht negative Lösungen, d.h. $x_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
1. Fall: $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}$ d.h. Widerspruch
2. Fall: $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{1}{2}$ d.h. Widerspruch
3. Fall: $x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{6} = \frac{4}{3}$ d.h. Widerspruch

4. Fall: $x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$ d.h. Widerspruch
5. Fall: $x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{6} = 1$ und $x_2 = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = 2$ ganzzahlig
6. Fall: $x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ Widerspruch
7. Fall: $x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ d.h. Widerspruch
8. Fall: $x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - \frac{7}{6} = 0{,}5$ d.h. Widerspruch
9. Fall: $x_3 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$ d.h. Widerspruch
10. Fall: $x_3 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$ d.h. Widerspruch
11. Fall: $x_3 = 10 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} - \frac{10}{6} = 0$ und $x_2 = \frac{10}{3} - \frac{10}{3} = 0$ d.h. ganzzahlig

Ganzzahlige, nicht negative Lösungen sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) Direktbedarfsmatrix Q:

	$1E_1$	$2E_2$	$4E_3$	$\sum$
Z_1	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$1 \cdot 4$	10
Z_2	$4 \cdot 1$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 4$	10

	$0E_1$	$0E_2$	$10E_3$	$\sum$
Z_1	$2 \cdot 0$	$2 \cdot 0$	$1 \cdot 10$	10
Z_2	$4 \cdot 0$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 10$	10

d.h. es entstehen für beide ganzzahligen, nicht negativen Produktionsprogramme jeweils 10 ME von Z_1 und 10 ME von Z_2.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $r'_M = 14\,800 \cdot \dfrac{0{,}02}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) \cdot (1{,}02^3 - 1)} = 398{,}68$
d.h. sie muss drei Jahre lang vorschüssig monatlich 398,68 Euro einzahlen.

b) Kontostand nach einem Jahr:
$398{,}68 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) - 1\,000 = 3\,835{,}99$
Rentenendwert der anschließenden 2-jährigen Rente:
$14\,800 - 3\,835{,}99 \cdot 1{,}02^2 = 10\,809{,}04$
Anschließende monatliche Einzahlungen r'_M:
$r'_M = 10\,809{,}04 \cdot \dfrac{0{,}02}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02) \cdot (1{,}02^2 - 1)} = 441{,}14$
d.h. in den beiden Jahren 2011 und 2012 muss sie vorschüssig monatlich 441,14 Euro einzahlen.

c) Kontostand nach zwei Jahren:
$4\,835{,}99 \cdot 1{,}02 + 4\,835{,}99 + 650 = 10\,418{,}70$
Rentenendwert der anschließenden einjährigen Rente:
$14\,800 - 10\,418{,}70 \cdot 1{,}02 = 4\,172{,}93$
Anschließende monatliche Einzahlungen r'_M:
$r'_M = \dfrac{4\,172{,}04}{(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}02)} = 344{,}02$
d.h. im Jahr 2012 muss sie vorschüssig monatlich 344,02 Euro einzahlen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_0 = \dfrac{1\,000}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}04} + \dfrac{2\,000}{1{,}04^2 \cdot (1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}04)} + \dfrac{3\,000}{1{,}04^5 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04)} = 5\,242{,}35$
d.h. die einmalige Rückzahlung beträgt 5 242,35 Euro.

b) $5\,242{,}35 = \dfrac{x}{1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}04} + \dfrac{x}{1{,}04^5\cdot(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}04)} \Rightarrow 5\,242{,}35 = 1{,}782479x \Rightarrow x =$ $2\,941{,}05$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 2 941,05 Euro.

c)
$$\begin{aligned} 5\,242{,}35 &= \frac{2\,500}{1{,}04^3\cdot(1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}04)} + \frac{x}{1{,}04^5\cdot(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}04)} \\ 5\,242{,}35 &= = 2\,150{,}80 + 0{,}8084529x \\ 3\,091{,}55 &= 0{,}8084529x \\ x &= 3\,824{,}03 \end{aligned}$$
d.h. die Restzahlung beträgt 3 824,03 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $r_j = 2000\cdot(12+5{,}5\cdot 0{,}05) = 24\,550$
$R_0 = 24\,550\cdot\dfrac{1{,}05^5-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^5} = 106\,288{,}66$
d.h. der Barwert aller Zahlungen beträgt 106 288,66 GE.

b) Restschuld am 01.01.2009:
$K_2 = 106\,288{,}66\cdot 1{,}05^2 - 24\,550\cdot\dfrac{1{,}05^2-1}{0{,}05} = 66\,855{,}74$
Barwert der neuen monatlichen Rente r_M:
$66\,855{,}74 = r_M(12+5{,}5\cdot 0{,}05)\cdot\dfrac{1{,}05^6-1}{0{,}05}\cdot\dfrac{1}{1{,}05^6} \Rightarrow r_M = 1\,073{,}06$
d.h. die monatlichen Zahlungen betragen 1 073,06 GE.

c) Restschuld am 01.01.2010:
$K_3 = 66\,855{,}74\cdot 1{,}05 - 1\,900\cdot(12+5{,}5\cdot 0{,}05) = 46\,876{,}03$
Setze: $y = 1+\dfrac{x}{100}$
Jährliche nachsch. Ersatzrente im Jahr 2010:
$y\cdot 1\,900\cdot(12+5{,}5\cdot 0{,}05) = 23\,322{,}50y$
Jährliche nachsch. Ersatzrente im Jahr 2011:
$y^2\cdot 1\,900\cdot(12+5{,}5\cdot 0{,}05) = 23\,322{,}50y^2$
Restschuld am 01.01.2012:
$$\begin{aligned} 0 &= 46\,876{,}03\cdot 1{,}05^2 - 1{,}05\cdot 23\,322{,}50y - 23\,322{,}50y^2 && \mid \div 23\,322{,}50 \\ 0 &= 2{,}215921 - 1{,}05y - y^2 && \mid \cdot(-1) \\ 0 &= y^2 + 1{,}05y - 2{,}215921 \\ y &= -0{,}525 \pm \sqrt{0{,}525^2 + 2{,}215921} \\ y &= 1{,}053463 \text{ oder } \underbrace{y = -2{,}103463}_{\notin\text{Def.bereich}} \\ x &= 5{,}3463\% \end{aligned}$$
d.h. der gesuchte Prozentsatz beträgt 5,35%.