Mathematik-Klausur vom 19. April 2006

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \to -5} \frac{2x^2 + 6x - 20}{6x + 30}$$

b) Bestimmen Sie die Sattelstelle der Funktion:

$$f(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy - 14{,}6x; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

c) Geben Sie die Lagrangefunktion $L(x, y, \lambda)$ zu dem nachfolgenden nicht-linearen Optimierungsproblem an:

$$f(x,y) = xy \overset{!}{=} \text{ maximal}; \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

unter Nebenbedingung: $4x + 5y = 80$

Aufgabe 2

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 15 & -4 \\ 8 & -1 & 18 & -6 \\ -7 & 1 & -16 & 5 \\ -6 & 1 & -13 & 4 \end{bmatrix}$$

Überprüfen Sie: $B = A^{-1}$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ eines Monopolisten mit

$$K(x) = 3x^2 - 5x + 20; \quad x \in [0; 10]$$

Die produzierte Menge x (in ME) kann am Markt in Abhängigkeit des Preises p (in GE pro ME) gemäß der folgenden linearen Nachfragefunktion abgesetzt werden:

$$x(p) = 10 - 0{,}5p; \quad p \in [0; 20]$$

a) Berechnen Sie die Gewinnfunktion und geben Sie die Gewinnzone an.

b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn und den dazugehörigen Gewinnmaximalen Preis.

c) Angenommen der Staat erhebt eine Steuer in Höhe von 1 € je produzierter und abgesetzter Mengeneinheit.

1. Wie verändert sich hierdurch der Gewinn-maximale Preis? Und welcher Anteil der Steuer wurde an den Konsumenten in Form des höheren Preises weitergegeben?
2. Wie hoch ist der Gewinn-maximale Umsatz (Erlös) des Monopolisten nach Abzug der Steuer?

Aufgabe 4
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie einen Kredit über 195 000 € auf. In den ersten 15 Jahren beträgt der Jahreszins 4 %, in den darauf anschließenden Jahren liegt er bei 5 %. Es werden zwei verschiedene Rückzahlungsmodelle vorgeschlagen:

a) 1. Rückzahlungsmodell:

- die ersten 15 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten über 3 000 €
- mit der letzten Quartalsrate eine zusätzliche Einmalzahlung über 10 000 €
- zehn Jahre lang vorschüssige Monatsraten über 1 000 €, erste Monatsrate ist fällig zu Beginn des 16. Jahres nach Kreditaufnahme
- eine Restzahlung einen Monat nach der letzten Monatsrate

Wie hoch ist die Restzahlung einen Monat nach der letzten Monatsrate?

b) 2. Rückzahlungsmodell:

- vorschüssige Quartalsraten über 3 500 €, erste Quartalsrate ist fällig sofort bei Kreditaufnahme
- eine Restzahlung drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate

Wie hoch ist die Restzahlung drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate?

Aufgabe 5
Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem:

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \ \max$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 800$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 900$$
$$x_1 + x_2 \leq 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem.

b) Geben Sie für jedes Tableau die Werte der Variablen x_1, x_2 und die Werte der Schlupfvariablen an.

c) Interpretieren Sie im Endtableau die Schattenpreise.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{2x^2+6x-20}{6x+30} = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{2(x+5)(x-2)}{6(x+5)} = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{2(x-2)}{6} = \dfrac{2\cdot(-7)}{6} = -\dfrac{7}{3}$

b) $f_x(x,y) = 6x + 5y - 14{,}6$
$f_y(x,y) = -8y + 5x$
$f_{xx}(x,y) = 6$
$f_{yy}(x,y = -8$
$f_{xy}(x,y) = 5$
Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{cccll}
\mathrm{I} & 0 & = & 6x + 5y - 14{,}6 & \\
\mathrm{II} & 0 & = & -8y + 5x & \\
\hline
5 \cdot \mathrm{I} & 0 & = & 30x + 25y - 73 & \\
6 \cdot \mathrm{II} & 0 & = & -48y + 30x & \\
\hline
5 \cdot \mathrm{I} - 6 \cdot \mathrm{II} & 0 & = & 73y - 73 & \Rightarrow y = 1 \\
\mathrm{II} & 0 & = & -8 + 5x & \Rightarrow x = 1{,}6
\end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(1{,}6\,;\,1) = 6 \cdot (-8) - 5^2 = -73 < 0$
d.h. $(1{,}6\,;\,1)$ ist eine Sattelstelle.

c) $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(4x + 5y - 80)$

Lösung zu Aufgabe 2

a) $A \cdot B = E$
d.h. B ist die Inverse zu A
d.h. es gilt $B = A^{-1}$

b) Das Gleichungssystem lässt sich entweder mit dem Gaußalgorithmus lösen oder mit Hilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix. Da die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems identisch ist mit der Matrix A aus a), ist der Lösungsweg mit Hilfe der Inversen kürzer:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \\ -17 \\ -15 \end{bmatrix}$$

d.h. $\mathbb{L} = \{ \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \\ -17 \\ -15 \end{bmatrix} \}$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Preis-Absatz Funktion $p(x)$:
$x = 10 - 0{,}5p \Rightarrow p = 20 - 2x$
d.h. $p(x) = 20 - 2x;\;\; x \in [0; 10]$
Umsatz-Funktion (Erlös-Funktion) $U(x)$:
$U(x) = p(x) \cdot x = 20x - 2x^2;\;\; x \in [0; 10]$
Gewinn-Funktion $G(x)$:
$G(x) = U(x) - K(x) = -5x^2 + 25x - 20;\;\; x \in [0; 10]$
Gewinnzone:

$0 = -5x^2 + 25x - 20 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 4$
$G(0) = -20$
d.h. Gewinnzone $= (1; 4)$

b) $G'(x) = -10x + 25$
$G''(x) = -10$
Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = -10x + 25 \Rightarrow x = 2{,}5$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -10 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 2{,}5$ globales (absolutes) Maximum
$G(2{,}5) = 11{,}25$
$p(2{,}5) = 15$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 11,25 GE und der Gewinn-maximale Preis beträgt 15 GE.

c) Kosten $K(x) = (3x^2 - 5x + 20) + 1 \cdot x = 3x^2 - 4x + 20$
Preis-Absatz Funktion $p(x) = 20 - 2x;\ \ x \in [0; 10]$
Umsatz $U(x) = 20x - 2x^2$
Gewinn $G(x) = U(x) - K(x) = -5x^2 + 24x - 20$

1. $G'(x) = -10x + 24$
   $G''(x) = -10$
   Notwendige Bedingung:
   $0 = G'(x) = -10x + 24 \Rightarrow x = 2{,}4$
   Hinreichende Bedingung:
   $G''(x) = -10 <_{\text{immer}} 0$
   d.h. $x = 2{,}4$ globales (absolutes) Maximum
   $p(2{,}4) = 15{,}2$
   d.h. der Gewinn-maximale Preis beträgt 15,2 GE.
   Der Stück-Verkaufspreis erhöht sich von 15 GE um 0,20 GE auf 15,20 GE.
   Ferner beträgt die Steuer eine GE pro Stück.
   0,20 GE von 1 GE sind 20 %.
   d.h. 20 % der Steuer werden in Form eines Preisaufschlags an den Konsumenten weitergegeben.
2. $U(2{,}4) = 36{,}48$
   Steuer $2{,}4 \cdot 1$ GE $= 2{,}4$ GE
   d.h. nach Abzug der Steuer beträgt der Gewinn-maximale Umsatz 34,08 GE.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente über 15 Jahre:
$$3\,000 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}04) = 12\,180$$
Nachschüssige Ersatz-Jahresrente über 10 Jahre:
$$1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) = 12\,325$$
Wert der Rückzahlungen am Ende des 25. Jahres:

$$12\,180 \cdot \frac{1{,}04^{15}-1}{0{,}04} \cdot 1{,}05^{10} + 10\,000 \cdot 1{,}05^{10} + 12\,325 \cdot \frac{1{,}05^{10}-1}{0{,}05} = 397\,266{,}71 + 16\,288{,}95 + 155\,022{,}53 = 568\,578{,}18$$

Wert des Kredits am Ende des 25. Jahres:

$$195\,000 \cdot 1{,}04^{15} \cdot 1{,}05^{10} = 572\,041{,}70$$

Differenz Kredit − Rückzahlungen:

$$572\,041{,}70 - 568\,578{,}18 = 3\,463{,}52$$

d.h. einen Monat nach der letzten Monatsrate sind noch 3 463,52 € zu zahlen, damit der Kredit vollständig zurückgezahlt ist.

b) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente in den ersten 15 Jahren:

$$3\,500 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 14\,350$$

Restschuld am Ende des 15. Jahres:

$$K_{15} = 195\,000 \cdot 1{,}04^{15} - 14\,350 \cdot \frac{1{,}04^{15}-1}{0{,}04} = 351\,183{,}98 - 287\,338{,}48 = 63\,845{,}50$$

Nachschüssige Ersatz-Jahresrente ab dem 16. Jahr:

$$3\,500 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}05) = 14\,437{,}50$$

Laufzeit n (in Jahren):

$$n = -\frac{\ln[1 - \frac{63\,845{,}50}{14\,437{,}50} \cdot 0{,}05]}{\ln 1{,}05} = 5{,}1216$$

d.h. es sind insgesamt $15 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 80$ volle Quartalsraten über 3 500 € zu zahlen.

Restschuld am Ende des 20. Jahres:

$$K_{20} = 63\,845{,}50 \cdot 1{,}05^5 - 14\,437{,}50 \cdot \frac{1{,}05^5-1}{0{,}5} = 81\,484{,}84 - 79\,776{,}30 = 1\,708{,}53$$

d.h. die Restschuld drei Monate nach der letzten vollen Quartalsrate beträgt 1 708,53 €.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Mit den Schlupfvariablen e_1, e_2, e_3 lautet das Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} Z = 4x_1 + 3x_2 &\to \max \\ 4x_1 + 2x_2 + e_1 &= 800 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 &= 900 \\ x_1 + x_2 + e_3 &= 300 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.	x_1	x_2	
e_1	$\boxed{4}$	2	800
e_2	2	3	900
e_3	1	1	300
	−4	−3	0

2.	e_1	x_2	
x_1	1/4	1/2	200
e_2	−1/2	2	500
e_3	−1/4	$\boxed{1/2}$	100
	1	−1	800

3.	e_1	e_3	
x_1	1/2	−1	100
e_2	1/2	−4	100
x_2	−1/2	2	200
	1/2	2	1 000

Die optimale Lösung ist: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ \hline 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Zielfunktionswert $Z = 1\,000$.

b) Basislösung des ersten Tableaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 800 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Basislösung des zweiten Tableaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Basislösung des dritten Tableaus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ \hline 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Schattenpreis 1/2:
Wird die Restriktionssumme der ersten Nebenbedingung von 800 E um eine Einheit erhöht auf 801 E, so erhöht sich der optimale Zielfunktionswert um 0,5 E auf 1 000,5 E.

Schattenpreis 0:
Wird die Restriktionssumme der zweiten Nebenbedingung von 900 E um eine Einheit erhöht auf 901 E, so erhöht sich der optimale Zielfunktionswert von 1 000 E nicht.

Schattenpreis 2:
Wird die Restriktionssumme der dritten Nebenbedingung von 300 E um eine Einheit erhöht auf 301 E, so erhöht sich der optimale Zielfunktionswert um 2 E auf 1 002 E.