Mathematik-Klausur vom 27.09.2010 und Finanzmathematik-Klausur vom 04.10.2010

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 39x + 120}{3x - 15}$

b) Bestimmen Sie Extrem- und Sattelstellen der Funktion:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4y + \frac{1}{3}y^3 \quad ; x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

a) Ein Unternehmen stellt seine Produkte in Produktlinie A in einem zweistufigen Produktionsprozess her. Aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 sowie anschließend die Endprodukte E_1, E_2 hergestellt. Die Direktbedarfe in Mengeneinheiten (ME) stellen sich wie folgt dar:

Direktbedarf an Rohstoffen für jeweils eine ME der Zwischenprodukte:

	Z_1	Z_2
R_1	2	3
R_2	5	4
R_3	3	8

Direktbedarf an Zwischenprodukten für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2
Z_1	4	6
Z_2	1	2

Direktbedarf an Rohstoffen für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2
R_1	4	7
R_2	6	2
R_3	0	6

1. Berechnen Sie den Gesamtbedarf an Rohstoffen R_1, R_2, R_3 für die Herstellung jeweils einer ME der Endprodukte E_1, E_2.

2. Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 werden benötigt, um 40 ME von E_1 und 60 ME von E_2 herzustellen?

b) In Produktlinie B des Unternehmens werden in einem fünfstufigen Prozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Der Gesamtbedarf an Rohstoffen zur Herstellung je einer ME der Endprodukte lässt sich der folgenden Matrix ablesen:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Von R_1 stehen 44 ME und von R_2 92 ME zur Verfügung.
Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramme für die drei Endprodukte. Dabei ist ein Produktionsprogramm ökonomisch sinnvoll, wenn es nicht negativ und ganzzahlig ist. Zur Lösung dieser Fragestellung gehen Sie wie folgt vor:

1. Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
2. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an. *Anmerkung: Lösungen ohne ausführliche Angabe des Lösungsweges werden nicht berücksichtigt, siehe auch Hinweis auf dem Deckblatt!)*
3. Geben Sie alle nicht negativen Lösungen an.
4. Geben Sie alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen an.

Aufgabe 3
Die Gesamtkosten (in Tausend Euro) für die Herstellung eines Produkts des Unternehmens beruhen in Abhängigkeit der Menge x (in Stück) auf folgender Funktion:

$$K(x) = 2x^3 - 24x^2 + 200x + 100 \ ; x \geq 0$$

a) Bestimmen und interpretieren Sie die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von zwölf Stück.

b) Erstellen Sie die variable Stückkostenfunktion (Funktion der variablen Kosten pro Stück).

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die variablen Stückkosten minimal (Stelle des Betriebsminimums)?

d) Ist die folgende Aussage zutreffend? „Im Betriebsminimum betragen sowohl die variablen Stückkosten als auch die Grenzkosten 128 Tausend Euro.“

e) Wie lautet das Gewinn-maximale Produktionsprogramm und wie hoch ist der zugehörige maximale Gewinn auf Grundlage der folgenden Gewinnfunktion (in Tausend Euro), die u.a. aus obiger Kostenfunktion abgeleitet wurde?

$$G(x) = -20x + 320\sqrt{x} - 100 \ \ x \in (0; 100]$$

Aufgabe 4
Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine

Geldanlage:

Anlagevolumen:	100 000 €	
Verzinsung:	Monatliche Verzinsung zum relativen Zins	
Auszahlung:	Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.	
Zinskonditionen:	1. Jahr:	2% p.a.
	2. bis 5. Jahr:	3% p.a.
	6. bis 10. Jahr:	4% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende des wie vielten Monats übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 110 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinssatz führt nach zehn Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a)?

Aufgabe 5

Bei 4,8% Jahreszins wird für einen Hauskauf am 01.01.2010 ein Kredit in Höhe von 150 000 Euro aufgenommen. Als Rückzahlung wird Annuitätentilgung über 20 Jahre vereinbart, erste Annuität ist fällig am 31.12.2010. In den ersten fünfzehn Jahren betragen die Annuitäten jeweils 10 000 Euro.

a) Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2024?

b) Wie hoch müssen die Annuitäten in den letzten fünf Jahren der Annuitätentilgung sein, damit der Kredit nach 20 Jahren abgezahlt ist?

c) Wie hoch ist der 20. Tilgungsbetrag?

Aufgabe 6

Eine Privatperson möchte einen Betrag von 10 000 € für vier Jahre anlegen. Sie erhält von ihrer Bank die folgenden beiden Angebote:

> Angebot 1:
> Der Betrag wird zu jährlich nachschüssigen Zinseszinsen angelegt. Die Bank gewährt im ersten Jahr 0,7% Zinsen, im zweiten 1,5% Zinsen und im dritten und vierten Jahr jeweils 2% Zinsen.

> Angebot 2:
> Die Bank legt den Betrag extern (bei einer Lebensversicherung) an. Die Privatperson erhält nach vier Jahren einen Betrag von 10 358 € zurück. Alternativ kann eine lebenslängliche jährlich vorschüssige Rente in Höhe von 640,92 € gewählt werden, erste Rentenauszahlung ist fällig genau vier Jahre nach der Anlage.

a) Welches Kapital ergibt sich nach vier Jahren bei Angebot 1?

b) Welcher gleichbleibende Zinssatz wäre in Angebot 1 bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung anzusetzen, damit ebenfalls das unter a) berechnete Kapital nach vier Jahren erreicht wird?

c) Welcher gleichbleibende Zinssatz wäre bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung anzusetzen, damit der eingezahlte Betrag wie in Angebot 2 nach vier Jahren auf 10 358 € anwachsen kann?

d) Wie lange muss bei Angebot 2 die Privatperson den Zeitpunkt der Geldanlage überleben, damit sich die Wahl der lebenslänglichen jährlich vorschüssigen Rente lohnt?
Verwenden Sie als Rechnungszins 2,25% p.a. (derzeitiger Mindestzins bei Abschluss einer Lebensversicherung).

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-39x+120}{3x-15} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3(x-5)(x-8)}{3(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3(x-8)}{3} = \dfrac{3\cdot(-3)}{3} = -3$

b) $f_x(x,y) = x^2+4x \quad f_{xx}(x,y) = 2x+4$
$f_y(x,y) = -4+y^2 \quad f_{yy}(x,y) = 2y$
$f_{xy}(x,y) = 0$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0 = x^2+4x = x(x+4) & \Leftrightarrow x=0 \text{ oder } x=-4 \\ \text{II} & 0 = -4+y^2 & \Leftrightarrow y=\pm 2 \end{array}$$

d.h. stationäre Punkte sind (0;2) und $(0;-2)$ und $(-4;2)$ und $(-4;-2)$.

Hinreichende Bedingung:

$D(x,y) = (2x+4)\cdot 2y - 0^2 = 4xy+8y$

$D(0;2) = 16 > 0$ und $f_{xx}(0;2) = 4 > 0$; d.h. (0;2) lok. Min

$D(0;-2) = -16 < 0$; d.h. $(0;-2)$ Sattelstelle

$D(-4;2) = -16 < 0$; d.h. $(-4;2)$ Sattelstelle

$D(-4;-2) = 16 > 0$ und $f_{xx}(-4;-2) = -4 < 0$; d.h. $(-4;-2)$ lok. Max

Lösung zu Aufgabe 2:

a) 1. Gesamtbedarf $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 40 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$

2. $M\cdot e = \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 40 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,100 \\ 3\,600 \\ 3\,200 \end{bmatrix}$

d.h. es werden 2 100 ME von R_1, 3 600 ME von R_2 und 3 200 ME von R_3 benötigt.

b) e_i = ME des Endprodukts E_i für $i = 1,2,3$

1. $$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2e_1+4e_2+6e_3 & = & 44 \\ \text{II} & 3e_1+8e_2+15e_3 & = & 92 \end{array}$$

2. Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3	r	Operation
①	$\boxed{2}$	4	6	44	
②	3	8	15	92	
③	2	4	6	44	①
④	0	4	12	52	$2\cdot$ ② $-3\cdot$ ①

④ $4e_2 + 12e_3 = 52 \Leftrightarrow e_2 = 13 - 3e_3$
③ $2e_1 + 4\cdot(13 - 3e_3) + 6e_3 = 44 \Leftrightarrow e_1 = 3e_3 - 4$
Lösungsmenge des Gleichungssystems:
$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 3e_3 - 4 \\ 13 - 3e_3 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in \mathbb{R}\}$$

3. Nicht negative Lösungen:
1.) $e_1 = 3e_3 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3e_3 \geq 4 \Leftrightarrow e_3 \geq \frac{4}{3}$
2.) $e_2 = 13 - 3e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 13 \geq 3e_3 \Leftrightarrow \frac{13}{3} \geq e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq \frac{13}{3}$
Nicht negative Lösungen:
$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 3e_3 - 4 \\ 13 - 3e_3 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in [\tfrac{4}{3}; \tfrac{13}{3}]\}$$

4. Ganzzahlige nicht negative Lösungen:
1. Möglichkeit $e_3 = 2 \Rightarrow e_1 = 3\cdot 2 - 4 = 2$ und $e_2 = 13 - 3\cdot 2 = 7$
2. Möglichkeit $e_3 = 3 \Rightarrow e_1 = 3\cdot 3 - 4 = 5$ und $e_2 = 13 - 3\cdot 3 = 4$
3. Möglichkeit $e_3 = 4 \Rightarrow e_1 = 3\cdot 4 - 4 = 8$ und $e_2 = 13 - 3\cdot 4 = 1$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $K'(x) = 6x^2 - 48x + 200$
$K'(12) = 488$
Wird statt 12 ME jetzt eine ME mehr hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 488 000 Euro.

b) $k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x} = 2x^2 - 24x + 200$

c) Notwendige Bedingung:
$0 = k_v'(x) = 4x - 24 \Leftrightarrow x = 6$
Hinreichende Bedingung:
$k_v''(x) = 4 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 6$ glob. Min
d.h. die variablen Stückkosten sind minimal, wenn 6 ME hergestellt werden.

d) *1. Lösungsweg:*
$k_v(6) = 128$ und $K'(6) = 128$
d.h. im Betriebsminimum $x = 6$ sind sind die variablen Stückkosten genau so hoch wie die Grenzkosten.

2. Lösungsweg:
Notwendige Bedingung:
$0 = k_v'(x) = \left(\frac{K_v(x)}{x}\right)' = \frac{K_v'(x) \cdot x - K_v(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{K_v'(x) - \frac{K_v(x)}{x}}{x}$
$\Rightarrow 0 = K_v'(x) - \frac{K_v(x)}{x} \Leftrightarrow \underbrace{K_v'(x)}_{K'(x)} = \underbrace{\frac{K_v(x)}{x}}_{k_v(x)}$
d. h. das Betriebsminimum liegt in der Schnittstelle von Grenzkosten und variablen Stückkosten.

e) Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= G'(x) = -20 + \frac{160}{\sqrt{x}} \qquad | \cdot \sqrt{x} \\ 0 &= -20\sqrt{x} + 160 \\ 8 &= \sqrt{x} \qquad | \text{ quadrieren} \\ 64 &= x \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -\frac{80}{\sqrt{x^3}} <_{\text{immer}} 0$; da $x > 0$
d.h. $x = 64$ glob. Max.
$G(64) = 1\,180$
d.h. werden 64 ME produziert und abgesetzt, so ist der Gewinn mit 1 180 000 Euro maximal.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12} = 102\,018{,}44$

$K_5 = 102\,018{,}44 \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{48} = 115\,008{,}24$

$K_{10} = 115\,008{,}24 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{60} = 140\,424{,}67$

d.h. der Betrag liegt bei 140 424,67 Euro.
2. Lösungsweg:

$K_{10} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{48} \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{60} = 140\,424{,}67$

b) nachschüssiger Ersatzzins $j = \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}030416$

$n = \frac{\ln\left(\frac{110\,000}{102\,018{,}44}\right)}{\ln 1{,}0030416} = 2{,}51403$ Jahre
$0{,}51403 \cdot 12 = 6{,}16836$ Monate
1 Jahr plus 2 Jahre plus 7 Monate = 43 Monate
d.h. nach 43 Monaten.
2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
102\,018{,}44 \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^x &= 110\,000 && \mid \div 102\,018{,}44\\
1{,}0025^x &= 1{,}078236 && \mid \ln\\
x &= \frac{\ln 1{,}078236}{\ln 1{,}0025} = 30{,}1682 \approx 31 \text{ Monate}
\end{aligned}$$

31 Monate plus 12 Monate = 43 Monate

c) $q = \sqrt[10]{\dfrac{140\,424{,}67}{100\,000}} = 1{,}034533$
d.h. der gesuchte Zins beträgt etwa 3,45%.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_{15} = 150\,000 \cdot 1{,}048^{15} - 10\,000 \cdot \dfrac{1{,}048^{15}-1}{0{,}048} = 90\,481{,}58$
d.h. die Restschuld nach 15 Jahren beträgt 90 481,58 Euro.

b) $90\,481{,}58 = A \cdot \dfrac{1{,}048^5-1}{0{,}048} \cdot \dfrac{1}{1{,}048^5} \Rightarrow A = 20\,783{,}56$
d.h. die restlichen Annuitäten betragen jeweils 20 783,56 Euro.

c) 1. Lösungsweg:
$T_{16} = 20\,783{,}56 - 90\,481{,}58 \cdot 0{,}048 = 16\,440{,}44$
$T_{20} = T_{16} \cdot 1{,}048^4 = 19\,831{,}64$
d.h. der letzte Tilgungsbetrag beträgt 19 831,64 Euro.
2. Lösungsweg:
$T_{20} = K_{19} = 90\,481{,}58 \cdot 1{,}048^4 - 20\,783{,}56 \cdot \dfrac{1{,}048^4-1}{0{,}048} = 19\,831{,}64$
3. Lösungsweg:
$K_{19} = 90\,481{,}58 \cdot 1{,}048^4 - 20\,783{,}56 \cdot \dfrac{1{,}048^4-1}{0{,}048} = 19\,831{,}64$
$Z_{20} = K_{19} \cdot 0{,}048 = 951{,}92$
$T_{20} = A - Z_{20} = 20\,783{,}56 - 951{,}92 = 19\,831{,}64$

Lösung zu Aufgabe 6

a) $K_4 = 10\,000 \cdot 1{,}007 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02^2 = 10\,633{,}98$
d.h. das Kapital nach vier Jahren beträgt 10 633,98 €.

b) $q = \sqrt[4]{\dfrac{10\,633{,}98}{10\,000}} = 1{,}0155$
d.h. der gesuchte Jahreszins beträgt 1,55 %.

c) $q = \sqrt[4]{\dfrac{10\,358}{10\,000}} = 1{,}0088$
d.h. der gesuchte Jahreszins beträgt 0,88 %.

d) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{10\,358}{640{,}92 \cdot 1{,}0225} \cdot 0{,}0225\right]}{\ln 1{,}0225} = 19{,}75$
d.h. die Rente sollte mindestens 20-mal bezogen werden. Da die erste Rente erst

vier Jahre nach der Anlage und jede Rente - also auch die letzte Rente - zu Beginn eines Jahres ausgezahlt wird, muss die Privatperson den Zeitpunkt der Anlage um mindestens $4 + 20 - 1 = 23$ Jahre überleben.