Mathematik-Klausur vom 28.01.2008

Studiengang BWL PO 1997:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI PO 2001:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang BWL PO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI PO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 1,2,3,4	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3,5	Dauer der Klausur: 90 Min

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad , B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x^2 + 16x - 84}{3x^2 + 6x - 45}$$

c) Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p = 12$ der folgenden Preisabsatzfunktion:

$$x(p) = 100 - 2p \ ; p \in [0; 50]$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 13 & -11 \end{bmatrix}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{4x^2 + 16x - 84}{3x^2 + 6x - 45} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{4(x-3)(x+7)}{3(x+5)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{4(x+7)}{3(x+5)} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$

c) $x'(p) = -2$

$\epsilon_x(12) = x'(12) \cdot \frac{12}{x(12)} = -2 \cdot \frac{12}{76} = -0{,}3158$

d.h. wird der Preis von 12 GE um 1% erhöht, so sinkt der Absatz um 0,32 %.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen produziert und vertreibt zwei Güter P und Q. Der Gewinn des Unternehmens ergibt sich durch:

$$G(x; y) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50 \ ; x \in [0; 15], y \in [0; 20]$$

Dabei sei x die Produktions- und Absatzmenge von Gut P in Mengeneinheiten und y die Produktions- und Absatzmenge von Gut Q in Mengeneinheiten.

a) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.
Hinweis: Runden Sie die Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

b) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn für den Fall, dass die Produktions- und Absatzmenge von Gut Q doppelt so groß ist wie die Produktions- und Absatzmenge von Gut P. Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit der Methode von Lagrange.

Lösung zu Aufgabe 2

a)
$$\begin{array}{lcl} G_x(x,y) & = & -4x+50-y \\ G_y(x,y) & = & -2y+15-x \\ G_{xx}(x,y) & = & -4 \\ G_{yy}(x,y) & = & -2 \\ G_{xy}(x,y) & = & -1 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{I} & 0 & = & -4x+50-y & \\ \mathrm{II} & 0 & = & -2y+15-x & \\ \hline 2\cdot\mathrm{I} & 0 & = & -8x+100-2y & \\ \mathrm{II} & 0 & = & -2y+15-x & \\ \hline 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} & 0 & = & -7x+85 & \Rightarrow x = 12\frac{1}{7} \\ \mathrm{I} & 0 & = & -\frac{340}{7}+50-y & \Rightarrow y = 1\frac{3}{7} \end{array}$$

d.h. (12,1; 1,4) ist eine mögliche Extremstelle

Hinreichende Bedingung:

$D(x,y) = (-4)\cdot(-2) - (-1)^2 = 7 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x,y) = -4 <_{\text{immer}} 0$

d.h. (12,1; 1,4) globales Maximum

$G(12{,}1; 1{,}4) = 265{,}2857 \approx 265{,}3$

d.h. der maximale Gewinn beträgt 265,3 GE.

b) NB: $y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$L(x,y,\lambda) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50 + \lambda(2x-y)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) & = & -4x+50-y+2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -4 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & -2y+15-x-\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 2x-y & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -1 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

1. Lösungsweg:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{I} & 0 & = & -4x+50-y+2\lambda & \\ \mathrm{II} & 0 & = & -2y+15-x-\lambda & \Rightarrow \mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II} \qquad 0 = -6x-5y+80 \\ \mathrm{III} & 0 & = & 2x-y & \Rightarrow y = 2x \\ \hline & 0 & = & -6x-5\cdot 2x+80 & \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 10 \\ \hline \mathrm{I} & 0 & = & -20+50-10+2\lambda & \Rightarrow \lambda = -10 \end{array}$$

2. Lösungsweg:

Gaußalgorithmus

Zeile	x	y	λ		Operation
1	$\boxed{-4}$	-1	2	-50	
2	-1	-2	-1	-15	
3	2	-1	0	0	
4	-4	-1	2	-50	1
5	0	$\boxed{-7}$	-6	-10	$4 \cdot$ 2 $-$ 1
6	0	-3	2	-50	$2 \cdot$ 3 $+$ 1
7	-4	-1	2	-50	4
8	0	-7	-6	-10	5
9	0	0	32	-320	$7 \cdot$ 6 $- 3 \cdot$ 5

9 $32\lambda = -320 \Leftrightarrow \lambda = -10$

8 $-7y + 60 = -10 \Leftrightarrow y = 10$

7 $-4x - 10 - 20 = -50 \Leftrightarrow x = 5$

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; -10) = (-4) \cdot (-2) - (-1)^2 = 7 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x; y; -10) = -4 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x, y)$ hat in (5;10) ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

$G(5; 10) = 150$

d.h. der maximale Gewinn beträgt 150 GE.

Aufgabe 3

Es soll die innerbetriebliche Leistungsverrechnung mit vier Hilfsbetrieben K_1, K_2, K_3, K_4 betrachtet werden, die ihre Leistungen an den Hauptbetrieb abgeben, sich aber auch wechselseitig mit Leistungen beliefern.

Die Leistungsabgaben (in LE) an den Hauptbetrieb sowie die gegenseitigen Leistungsabgaben (in LE) der Hilfsbetriebe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Empfänger				Hauptbetrieb
Lieferant	K_1	K_2	K_3	K_4	
K_1	0	50	50	50	50
K_2	100	0	100	50	150
K_3	200	200	0	100	0
K_4	100	100	200	0	600

Die Primärkosten (Kosten für Löhne, Material, Energie und Kapital) betragen für K_1 genau 100 GE, für K_2 und K_3 jeweils 600 GE und für K_4 genau 200 GE.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.

b) Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

Lösung zu Aufgabe 3

v_1 = Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE

v_2 = Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3 = Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE
v_4 = Bewertung in GE für eine in K_4 hergestellte LE

a) Kostengleichgewicht

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & (50+50+50+50)v_1 - 100v_2 - 200v_3 - 100v_4 & = & 100 \\
\text{II} & (100+100+50+150)v_2 - 50v_1 - 200v_3 - 100v_4 & = & 600 \\
\text{III} & (200+200+100+0)v_3 - 50v_1 - 100v_2 - 200v_4 & = & 600 \\
\text{IV} & (100+100+200+600)v_4 - 50v_1 - 50v_2 - 100v_3 & = & 200
\end{array}$$

b) Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3	v_4	Primärkosten	Operation
1	$\boxed{200}$	−100	−200	−100	100	
2	−50	400	−200	−100	600	
3	−50	−100	500	−200	600	
4	−50	−50	−100	1 000	200	
5	200	−100	−200	−100	100	1
6	0	$\boxed{1\,500}$	−1 000	−500	2 500	4 · 2+1
7	0	−500	1 800	−900	2 500	4 · 3+1
8	0	−300	−600	3 900	900	4 · 4+1
9	200	−100	−200	−100	100	5
10	0	1 500	−1 000	−500	2 500	6
11	0	0	$\boxed{4\,400}$	−3 200	10 000	3 · 7+6
12	0	0	−4 000	19 000	7 000	5 · 8+6
13	200	−100	−200	−100	100	9
14	0	1 500	−1 000	−500	2 500	10
15	0	0	4 400	−3 200	10 000	11
16	0	0	0	177 000	177 000	11 · 12 +10 · 11

16 $177\,000 v_4 = 177\,000 \Rightarrow v_4 = 1$
15 $4\,400 v_3 - 3\,200 = 10\,000 \Rightarrow v_3 = 3$
14 $1\,500 v_2 - 3\,000 - 500 = 2\,500 \Rightarrow v_2 = 4$
13 $200 v_1 - 400 - 600 - 100 = 100 \Rightarrow v_1 = 6$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 6 GE, in K_2 genau 4 GE, in K_3 genau 3 GE und in K_4 genau 1 GE.

Aufgabe 4

Auf ein Konto erfolgte am 31.12.2007 bei 4% Jahreszins eine Einzahlung, so dass in den Jahren 2010 bis 2020 (einschließlich) vierteljährlich vorschüssig 2 000 Euro abgehoben werden können.

a) Wie hoch war die Einzahlung am 31.12.2007?

b) Unerwartet müssen am 31.12.2015 von diesem Konto 20 000 Euro abgehoben werden. Dafür entfallen die vierteljährlichen vorschüssigen Entnahmen im Jahr 2015. Wie hoch fallen jetzt die vierteljährlichen vorschüssigen Entnahmen in den Jahren 2016 bis 2020 (einschließlich) aus?

Lösung zu Aufgabe 4

a) $K_0 = 2000(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{11} - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{13}} = 66\,416{,}34$
d.h. die Einzahlung betrug 66 416,34 Euro.

b) $R_0 = 66\,416{,}34 \cdot 1{,}04^8 - 2000(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot 1{,}04 - 20\,000 = 90\,895{,}35 - 46\,190{,}4 - 20\,000 = 24\,704{,}95$

$$24\,704{,}95 = r_J \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5} \Rightarrow r_J = \frac{24\,704{,}95}{4{,}451822} = 5\,549{,}402$$

$$5\,549{,}402 = r_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \Rightarrow r_Q = \frac{5\,509{,}402}{4{,}1} = 1\,353{,}513$$

d.h. die Entnahmen betragen 1 353,51 Euro.

Aufgabe 5

Bei der Produktion seines wichtigsten Gutes geht ein Unternehmen für die Kosten in Abhängigkeit der Produktionsmenge x von folgender Funktion aus:

$$K(x) = 3x^3 - 30x^2 + 450x + 1\,152 \quad ; x \in [0; 20]$$

a) Bestimmen Sie das Betriebsminimum, d.h. die Produktionsmenge mit den minimalen variablen Stückkosten (minimalen durchschnittlichen variablen Kosten).

b) Zeigen Sie, dass die Stückkosten (durchschnittlichen Gesamtkosten) bei einer Produktionsmenge von acht Mengeneinheiten minimal sind; d.h. dass bei einer Produktionsmenge von acht Mengeneinheiten das Betriebsoptimum angenommen wird.

Lösung zu Aufgabe 5

a) variable Stückkosten $k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x} = 3x^2 - 30x + 450$
$k_v'(x) = 6x - 30$
$k_v''(x) = 6$
Notwendige Bedingung
$0 = 6x - 30 \Rightarrow x = 5$
Hinreichende Bedingung
$k_v''(x) = 6 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 5$ glob. Min.

d.h. werden von dem Gut fünf ME hergestellt, so sind die variablen Stückkosten minimal.

b) Stückkosten $k(x) = \dfrac{K(x)}{x} = 3x^2 - 30x + 450 + \dfrac{1\,152}{x}$
$k'(x) = 6x - 30 - \frac{1\,152}{x^2}$
$k''(x) = 6 + \frac{2\,304}{x^3}$
Notwendige Bedingung
$k'(8) = 48 - 30 - \frac{1\,152}{64} = 0$
Hinreichende Bedingung
$k''(x) = 6 + \frac{2\,304}{x^3} >_{\text{immer}} 0$; da $x \in (0; 20]$
d.h. $x = 8$ glob Min
d.h. werden acht ME hergestellt, so sind die Stückkosten minimal.

Aufgabe 6

Ein Schuldner hat bei relativer gemischter Verzinsung mit 6% Jahreszinsen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 40 000 € am 31.03.2008
- 60 000 € am 31.12.2010
- 20 000 € am 31.12.2011

Statt diesen Zahlungsverpflichtungen möchte der Schuldner

a) seine Schuld mit einer einmaligen Zahlung am 01.01.2008 zurückzahlen. Wie hoch ist der einmalige Rückzahlungsbetrag? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

b) 20 000 € am 01.01.2008 zurückzahlen und nach vier Jahren die verbleibende Restschuld. Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag nach vier Jahren? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

c) die gesamte Schuld in drei gleich großen Beträgen am 01.01.2009, am 30.06.2010 und am 01.04.2011 zurückzahlen. Wie hoch werden diese Rückzahlungsbeträge sein? Bewertungsstichtag ist der 01.01.2008.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\dfrac{40\,000}{1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}06} + \dfrac{60\,000}{1{,}06^3} + \dfrac{20\,000}{1{,}06^4} = 39\,408{,}87 + 50\,377{,}16 + 15\,841{,}87 = 105\,627{,}90$
d.h. die Rückzahlung beträgt 105 627,90 € .

b) Schulden = Rückzahlungen
$105\,627{,}90 = 20\,000 + \dfrac{x}{1{,}06^4} \Rightarrow x = 108\,103{,}25$
d.h. die Rückzahlung nach vier Jahren beträgt 108 103,25 € .

c) Schulden = Rückzahlungen

$$\begin{aligned}
105\,627{,}90 &= \frac{x}{1{,}06} + \frac{x}{1{,}06^2\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}06\right)} + \frac{x}{1{,}06^3\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06\right)}\\
105\,627{,}90 &= 0{,}9434x + 0{,}8641x + 0{,}8272x\\
105\,627{,}90 &= 2{,}6347x\\
x &= 40\,091{,}05
\end{aligned}$$

d.h. die einheitliche Rückzahlung beträgt jeweils 40 091,05 € .

Aufgabe 7

Ein Darlehen über 500 000 € wird von einer Bank zu folgenden Konditionen zur Verfügung gestellt:

Auszahlung:	100%
Darlehnszins:	9% p.a.
Tilgungsart:	Prozentannuitätentilgung
Erster Tilgungsbetrag:	1% der aufgenommenen Schuld
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Darlehnsaufnahme

a) Stellen Sie den Tilgungsplan für die ersten beiden Jahre auf.

b) Wie viele Prozent-Annuitäten können in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

d) Nach wie vielen Jahren liegt die Restschuld erstmals unter 350 000 € ?

Lösung zu Aufgabe 7

$A = (0{,}09 + 0{,}01)\cdot 500\,000 = 50\,000$

a)

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	45 000	–	45 000	500 000
2	45 000	5 000	50 000	495 000

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1-\frac{500\,000}{50\,000}\cdot 0{,}09\right]}{\ln 1{,}09} = 26{,}71904$

d.h. es sind 26 volle Prozent-Annuitäten zu leisten.

c) $K_{26} = 500\,000\cdot 1{,}09^{26} - 50\,000\cdot\dfrac{1{,}09^{26}-1}{0{,}09} = 33\,380{,}12$

$33\,380{,}12\cdot 1{,}09 = 36\,384{,}33$

Die Restzahlung beträgt 36 384,33. €

d) *1.Lösungsweg:*

$$
\begin{array}{rcll}
350\,000 & = & 500\,000 \cdot 1{,}09^k - 50\,000 \cdot \frac{1{,}09^k - 1}{0{,}09} & \mid \cdot 0{,}09 \\
31\,500 & = & 45\,000 \cdot 1{,}09^k - 50\,000 \cdot 1{,}09^k + 50\,000 & \\
31\,500 & = & -5\,000 \cdot 1{,}09^k + 50\,000 & \mid -50\,000 \\
-18\,500 & = & -5\,000 \cdot 1{,}09^k & \mid \div(-5\,000) \\
3{,}7 & = & 1{,}09^k & \\
k & = & \dfrac{\ln 3{,}7}{\ln 1{,}09} & \\
k & = & 15{,}18 &
\end{array}
$$

d.h. nach 16 Tilgungs-Jahren

d.h. nach 16+1=17 Jahren

2. Lösungsweg:

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{350\,000}{50\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln 1{,}09} = 11{,}53723$$

$26{,}71904 - 11{,}53723 = 15{,}18181$