Mathematik-Klausur vom 30. März 2005

Aufgabe 1

a) Welche lineare Funktion $f(x) = mx + b$ nimmt für $x = 1$ den Funktionswert 1 und für $x = 4$ den Funktionswert 7 an?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung der beiden Funktionen:
$f(x) = x^3 + \sqrt[4]{x} \;\; ; x > 0$
$h(x) = x \cdot e^x \;\; ; x \in \mathbb{R}$

c) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Geben Sie die Lösungsmenge an.
2. Welche der Lösungen erfüllen die Bedingungen $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Eine Studentin erbt 25 189 € nach Abzug aller Steuern und Abgaben. Sie möchte sich diese Erbschaft nicht sofort, sondern zwecks Finanzierung ihres Studiums als monatlich nachschüssige Rente auszahlen lassen. Die erste Monatsrate wird einen Monat nach Erhalt der Erbschaft ausgezahlt. Die Studentin geht bei ihren Überlegungen von einer Reststudiendauer von fünf Jahren und einem Zins von 3,25% pro Jahr aus.

a) Berechnen Sie die nachschüssige Monatsrente.

b) Wie hoch wäre die monatlich nachschüssige Rente, wenn die Studentin für einen Autokauf am Ende des zweiten Jahres 6 500 € einplanen und nur den Restbetrag in eine fünfjährige Rentenzahlung umwandeln möchte?

c) Wie viele Jahre (ohne Beachtung der Reststudienzeit) wäre aus der Ebschaft eine monatlich nachschüssige Rente in Höhe von 500 € finanzierbar?

d) Die Studentin entscheidet sich für a), d.h. sie bezieht eine monatlich nachschüssige Rente, und wendet dafür die komplette Erbschaft auf. Nach zwei Jahren ändert die Bank ihre Konditionen und senkt den Zins von 3,25 auf 3% pro Jahr ab. Wie hoch sind jetzt die nachschüssigen Monatsraten für die letzten drei Jahre?

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Der Gesamtbedarf (in ME) an Rohstoffen R_1, R_2, R_3 für die Herstellung von jeweils einer Mengeneinheit der Endprodukte E_1, E_2, E_3 beträgt (Produktionsmatrix):

	E_1	E_2	E_3
R_1	1	0	2
R_2	2	2	0
R_3	4	1	1

Der Vorrat an Rohmaterialien beträgt 1 000 ME von R_1, 2 000 ME von R_2 und 3 000 ME von R_3. Wie viele Mengeneinheiten der Endprodukte lassen sich aus dem Vorrat herstellen, wenn der Vorrat vollständig aufgebraucht werden soll?

Aufgabe 4

Ein Monopolist bietet sein Produkt auf zwei getrennten Märkten an, auf denen folgende Preis-Absatz Funktionen gelten:

Markt 1: $x_1 = 160 - p_1 \quad ; p_1 \in [0\,;\,160]$

Markt 2: $x_2 = 180 - 2p_2 \quad ; p_2 \in [0\,;\,90]$

Hierbei bezeichnen p_1 den Preis des Produkts in GE auf Markt 1 beim Absatz der Menge x_1 und p_2 den Preis des Produkts in GE auf Markt 2 beim Absatz der Menge x_2. Die Kosten der Produktion betragen:

$$K(x_1, x_2) = 40x_1 + 20x_2 + 100.$$

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion auf und bestimmen Sie deren Definitionsbereich.

b) Welche Mengen wird der Monopolist zu welchen Preisen auf den Märkten 1 und 2 anbieten, um den maximalen Gewinn zu erzielen? Wie hoch ist sein maximaler Gewinn?

c) Der Monopolist entscheidet sich, in der nächsten Periode auf Markt 1 eine Mengeneinheit mehr abzusetzen, während er auf Markt 2 nach wie vor dieselbe Menge anbietet. Wie verändert sich hierdurch (näherungsweise) sein maximaler Gewinn aus Teilaufgabe b)?

Aufgabe 5

Ein Investor möchte in drei Anlagemöglichkeiten A_1, A_2, A_3 investieren. Die drei Anlagemöglichkeiten haben jeweils eine Laufzeit von drei Perioden. Die Rückflüsse in Prozent des Anlagebetrages der drei Möglichkeiten ergeben sich jeweils am Periodenende wie folgt:

	Anlagemöglichkeit		
	A_1	A_2	A_3
Periode 1	0%	5%	3%
Periode 2	5%	5%	3%
Periode 3	5%	0%	3%

Ferner besteht ein Liquiditätsbedarf

- von mindestens 2 000 GE am Ende der ersten Periode

- von mindestens 6 000 GE am Ende der zweiten Periode
- von mindestens 8 000 GE am Ende der dritten Periode

Der Liquiditätsbedarf soll jeweils durch die Rückflüsse der zugehörigen Periode gedeckt werden.
Ziel ist es, die Investitionsbeträge für die drei Anlagemöglichkeiten so festzulegen, dass insgesamt möglichst wenig Geld zu investieren ist. Rechnen Sie drei Tableaus des Simplex-Algorithmus und geben Sie zum dritten Tableau den zugehörigen Investitionsplan an.

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1

a)
$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 1 & = & m\cdot 1+b \\ \text{II} & 7 & = & m\cdot 4+b \\ \hline \text{II}-\text{I} & 6 & = & 3m \Rightarrow m=2 \Rightarrow 1=2+b \Rightarrow b=-1 \end{array}$$
d.h. $f(x) = 2x - 1$.

b) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{4}x^{-3/4} = 3x^2 + \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$
$h'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x + xe^x$

c) 1. Gauß-Algorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	-1	-1	1	
2	2	-2	1	2	
3	2	-1	-1	1	1
4	0	-1	2	1	2−1

4 $-x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 2x_3 - 1$
3 $2x_1 - (2x_3 - 1) - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 3x_3 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1{,}5x_3$
Lösungsmenge des Gleichungssystems:
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1{,}5x_3 \\ 2x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. 1) $x_1 = 1{,}5x_3 > 0 \Rightarrow x_3 > 0$
2) $x_2 = 2x_3 - 1 > 0 \Rightarrow 2x_3 > 1 \Rightarrow x_3 > 0{,}5$
3) $x_3 > 0$
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1{,}5x_3 \\ 2x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in (0{,}5\,;\,\infty) \right\}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$25\,189 = r_J \cdot \dfrac{1{,}0325^5 - 1}{0{,}0325} \cdot \dfrac{1}{1{,}0325^5} \Rightarrow r_j = 5\,539{,}45$
Nachschüssige Monatsrente r_M:
$5\,539{,}45 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) \Rightarrow r_M = 454{,}85$
d.h. die Monatsrente beträgt 454,85 €.

b) Barwert der fünfjährigen Rente:
$25\,189 - \dfrac{6\,500}{1{,}0325^2} = 19\,091{,}7608$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$19\,091{,}7608 = r_J \cdot \dfrac{1{,}0325^5 - 1}{0{,}0325} \cdot \dfrac{1}{1{,}0325^5} \Rightarrow r_J = 4\,198{,}58$
Nachschüssige Monatsrente r_M:
$4\,198{,}58 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) \Rightarrow r_M = 344{,}75$
d.h. die Monatsrente beträgt 344,75 €.

c) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 500(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0325) = 6\,089{,}375$
Laufzeit:
$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{25\,189}{6\,089{,}375} \cdot 0{,}0325]}{\ln 1{,}0325} = 4{,}5141$
d.h. vier Jahre lang könnte die volle Monatsrente bezogen werden.

d) Guthaben am Ende des 2. Jahres:
$K_2 = 25\,189 \cdot 1{,}0325^2 - 5\,539{,}45 \cdot 1{,}0325 - 5\,539{,}45 = 15\,593{,}9588$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$15\,593{,}9588 = r_J \cdot \dfrac{1{,}03^3 - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^3} \Rightarrow r_J = 5\,512{,}9379$
Nachschüssige Monatsrente r_M:
$5\,512{,}9379 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}03) \Rightarrow r_M = 453{,}18$
d.h. die Monatsrente beträgt 453,18 €.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Vollständige Elimination:

Zeile							Operation
①	$\boxed{1}$	0	2	1	0	0	
②	2	2	0	0	1	0	
③	4	1	1	0	0	1	
④	1	0	2	1	0	0	①
⑤	0	2	−4	−2	1	0	②−2 · ①
⑥	0	$\boxed{1}$	−7	−4	0	1	③−4 · ①

7	1	0	2	1	0	0	4
8	0	1	-7	-4	0	1	6
9	0	0	10	6	1	-2	$5 - 2 \cdot 6$
10	5	0	0	-1	-1	2	$5 \cdot 7 - 9$
11	0	10	0	2	7	-4	$10 \cdot 8 + 7 \cdot 9$
12	0	0	10	6	1	-2	9
13	1	0	0	$-1/5$	$-1/5$	$2/5$	10
14	0	1	0	$1/5$	$7/10$	$-2/5$	$11 \div 10$
15	0	0	1	$3/5$	$1/10$	$-1/5$	$12 \div 10$

Also ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 7/10 & -2/5 \\ 3/5 & 1/10 & -1/5 \end{bmatrix}$

b) e_1 =ME von E_1
e_2 =ME von E_2
e_3 =ME von E_3
Für den Gesamtbedarf M gilt: $M \cdot e = \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 2\,000 \\ 3\,000 \end{bmatrix}$
Da die Inverse von M aus dem Aufgabenteil a) schon vorliegt, ist es hier schneller, die Lösung nicht über den Gauß-Algorithmus zu bestimmen, sondern wie folgt:
$e = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 2\,000 \\ 3\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 7/10 & -2/5 \\ 3/5 & 1/10 & -1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 2\,000 \\ 3\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$
d.h. aus dem Vorrat können 600 ME von E_1, 400 ME von E_2 und 200 ME von E_3 hergestellt werden.

Lösung zu Aufgabe 4
$x_1 = 160 - p_1 \Rightarrow p_1 = 160 - x_1 \Rightarrow x_1 \in [0\,;\,160]$
$x_2 = 180 - 2p_2 \Rightarrow p_2 = 90 - 0{,}5x_2 \Rightarrow x_2 \in [0\,;\,180]$
Umsatz $U(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 160x_1 - x_1^2 + 90x_2 - 0{,}5x_2^2$
Kurzschreibweise $x = x_1$ und $y = x_2$

a) Gewinn $G(x,y) = U(x,y) - K(x,y) = 120x - x^2 + 70y - 0{,}5y^2 - 100$
$x \in [0\,;\,160]$ und $y \in [0\,;\,180]$

b) $$\begin{aligned} G_x(x,y) &= 120 - 2x \\ G_y(x,y) &= 70 - y \\ G_{xx}(x,y) &= -2 \\ G_{yy}(x,y) &= -1 \\ G_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$
Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0 = & 120 - 2x & \Rightarrow x = 60 \\ \text{II} & 0 = & 70 - y & \Rightarrow y = 70 \end{array}$$

d.h. $(60;70)$ ist eine mögliche Extremstelle
Hinreichende Bedingung:
$D(x,y) = (-2)\cdot(-1) - 0 = 2 >_{\text{immer}} 0$
$G_{xx}(x,y) = -2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $(60;70)$ globales Maximum
$p_1 = 160 - 60 = 100$
$p_2 = 90 - 35 = 55$
$G(60;70) = 5\,950$
d.h. es sind 60 ME auf Markt 1 mit dem Preis 100 GE und 70 ME auf Markt 2 mit dem Preis 55 GE abzusetzen, um den maximalen Gewinn von 5 950 GE zu erzielen.

c) *1. Lösungsweg:*
$G(60;70) - G(61;70) = 5\,950 - 5\,949 = 1$
d.h. sein maximaler Gewinn reduziert sich um eine Geldeinheit.
2. Lösungsweg:
Grenzgewinn $G_x(60;70) = 120 - 2\cdot 60 = 0$
Es gilt: $G(61;70) \approx G(60;70) + G_x(60;70) = G(60;70) + 0$
d.h. werden statt $x = 60$ jetzt 61 ME abgesetzt, so verändert sich der maximale Gewinn nicht.
3. Lösungsweg:
Da der Grenzgewinn $G_x(x;y) = 120 - 2x$ im glob. Max (60;70) null beträgt, schauen wir uns den Grenzgewinn an der Stelle (61;70) an.
Es gilt: $G(62;70) \approx G(61;70) + G_x(61;70) = G(61;70) - 2$
d.h. steigt der Absatz von $x = 61$ auf 62 ME, so sinkt der Gewinn um 2 GE.
Wir haben somit folgende Näherungen:
I $G(61;70) \approx G(60;70) + G_x(60;70) = G(60;70) + 0 = G(60;70)$
II $G(62;70) \approx G(61;70) + G_x(61;70) = G(61;70) - 2 \approx_{\text{mit I}} G(60;70) - 2$
d.h. werden statt $x = 60$ jetzt 62 ME abgesetzt, so sinkt der maximale Gewinn um etwa 2 GE.
Die Stelle $x = 61$ liegt zwischen $x = 60$ und $x = 62$. Da der Grenzgewinn eine fallende Gerade ist, kann beim Übergang von $x = 60$ zu $x = 61$ nicht viel mehr passieren als beim Übergang von $x = 60$ zu $x = 62$, d.h. der maximale Gewinn reduziert sich um etwa 2 GE.

Lösung zu Aufgabe 5
x_1= Investitionssumme (in GE) in A_1
x_2= Investitionssumme (in GE) in A_2
x_3= Investitionssumme (in GE) in A_3
Minimum-Problem:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0{,}05x_2 + 0{,}03x_3 & \geq & 2\,000 \\
\text{II} & 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}03x_3 & \geq & 6\,000 \\
\text{III} & 0{,}05x_1 + 0{,}03x_3 & \geq & 8\,000
\end{array}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \stackrel{!}{=} \text{minimal} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

①	x_1	x_2	x_3	
e_1	0	−0,05	−0,03	−2 000
e_2	−0,05	−0,05	−0,03	−6 000
e_3	−0,05	0	$\boxed{-0{,}03}$	−8 000
	1	1	1	0

②	x_1	x_2	e_3	
e_1	$\boxed{0{,}05}$	−0,05	−1	6 000
e_2	0	−0,05	−1	2 000
x_3	5/3	0	100/3	266 6662/3
	−2/3	1	100/3	−266 6662/3

③	e_1	x_2	x_3	
x_1	20	−1	20	120 000
e_2	0			2 000
x_3	−100/3			66 6662/3
	40/3	1/3	20	−186 6662/3

In diesem 3. Tableau steht schon die optimale Lösung. In Anlage A_1 sind 120 000 GE zu investieren, in Anlage A_2 nichts und in Anlage A_3 66 666,67 GE, damit die Investitionssumme minimal ist und gleichzeitig die Geldmittel an jedem Periodenende zur Verfügung stehen.