Mathematik-Klausur vom 30.09.2009 und Finanzmathematik-Klausur vom 02.10.2009

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1
Die Gesamtkosten für die Produktion eines Erzeugnisses des Unternehmens basieren in Abhängigkeit der Menge x auf folgender Funktion:

$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 527x \ \ ; x \geq 0$$

a) Bestimmen und interpretieren Sie die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 15 Stück.

b) Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion (Funktion der durchschnittlichen Kosten).

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal (Betriebsoptimum)?

d) Wie hoch sind die Fixkosten?

e) Bestimmen Sie das Gewinn-maximale Produktionsprogramm unter der Voraussetzung, dass der Preis p konstant ist (polypolistischer Markt) und damit unabhängig von der produzierten Menge des Erzeugnisses 470 EUR pro Stück beträgt.

Aufgabe 2
Es soll die innerbetriebliche Leistungsverrechnung mit vier Kostenstellen K_1, K_2, K_3, K_4 betrachtet werden, die ihre Leistungen an den Absatzmarkt abgeben, sich aber auch wechselseitig mit Leistungen beliefern.

Die Leistungsabgaben (in LE) an den Absatzmarkt sowie die gegenseitigen Leistungsabgaben (in LE) der Kostenstellen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Empfänger				Absatzmarkt
Lieferant	K_1	K_2	K_3	K_4	
K_1	0	10	20	30	40
K_2	20	0	30	10	40
K_3	10	20	0	30	90
K_4	40	10	10	0	60

Die Primärkosten (Kosten für Löhne, Material, Energie und Kapital) betragen für K_1 genau 270 GE, für K_2 genau 50 GE, für K_3 genau 250 GE und für K_4 genau 220 GE.
Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

Aufgabe 3
Ein Unternehmen stellt die Produkte A und B her. Die Gewinnfunktion in Abhängigkeit der Mengen x und y lautet:

$$G(x, y) = 20x + 39y - 2x^2 - 3y^2 \ ; x, y \geq 0$$

Dabei stellt x die Produktionsmenge von Gut A in Tonnen und y die Produktionsmenge von Gut B in Tonnen dar.

a) Bestimmen Sie das Gewinn-maximale Produktionsprogramm in Tonnen, wenn die Produktionsrestriktion
$$4x + 6y = 24$$
eingehalten werden muss. Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit der Methode von Lagrange.

b) Wie würde die Nebenbedingung lauten, wenn von Gut A (Menge x) aufgrund produktionstechnischer Gegebenheiten nur 1/5 der Produktionsmenge des Gutes B (Menge y) hergestellt werden könnte?

Aufgabe 4
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie zu Beginn des Jahres 2010 einen Kredit über 150 000 Euro auf. Für die Rückzahlung wird eine Annuitätentilgung zu 4,2% Jahreszinsen vereinbart. Die erste Rückzahlung ist fällig am 31.12.2010 und hat einen Tilgungssatz von 1%.

a) Wie hoch sind die Annuitäten?

b) Wie oft sind volle Annuitäten zu zahlen?

c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgung, Annuität, Restschuld) für das 21. Jahr an.

d) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Aufgabe 5
Bei 4,2% Jahreszins bestehen die folgenden Zahlungverpflichtungen:

- 10 000 Euro am 01.01.2010
- 20 000 Euro am 01.01.2014

- 15 000 Euro am 01.01.2015

Der Schuldner möchte seine Schulden zurückzahlen durch

a) gleich hohe vorschüssige Quartalsraten. Die erste Quartalsrate ist fällig am 01.01.2010, die letzte Quartalsrate soll am 01.10.2015 gezahlt werden. Wie hoch sind die Quartalsraten?

b) gleich hohe vorschüssige Monatsraten über 1 000 Euro. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2010. Wie viele volle Monatsraten muss er zahlen?

c) drei gleich hohe Beträge fällig am

   - 01.01.2010
   - 01.01.2014
   - 01.01.2016

   Wie hoch sind diese Rückzahlungsbeträge?

Aufgabe 6
Eine Person möchte sich durch monatlich nachschüssige Einzahlungen auf ein Sparkonto - Einzahlungszeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 - eine private Altersversorgung finanzieren. Das am 31.12.2029 angesparte Kapital soll 200 000 GE betragen. Gehen Sie bei allen nachfolgenden Berechnungen von einem Rechnungszins von 4 % p.a. aus.

a) Berechnen Sie die monatlichen Einzahlungen, wenn diese über den kompletten Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 konstant sind.

b) Vom 01.01.2010 bis 31.12.2019 sind die monatlichen Einzahlungen konstant. Am 01.01.2020 sollen die monatlichen Einzahlungen um 2% erhöht und dann bis 31.12.2029 die erhöhten Beträge eingezahlt werden. Wie hoch sind die monatlichen Einzahlungen im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019 und wie hoch sind sie im Zeitraum 01.01.2020 bis 31.12.2029, damit die private Altersversorgung am 01.01.2030 ausfinanziert ist?

c) Vom 01.01.2010 bis 31.12.2019 betragen die monatlichen Einzahlungen 520 GE. Am 01.01.2020 sollen die monatlichen Einzahlungen erhöht und dann bis 31.12.2029 die erhöhten Beträge eingezahlt werden. Um wie viel Prozent müssen die monatlichen Einzahlungen am 01.01.2020 erhöht werden, damit die private Altersversorgung am 01.01.2030 ausfinanziert ist?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $K'(x) = 3x^2 - 60x + 527 \Rightarrow K'(15) = 302$
   d.h. werden statt 15 ME jetzt 16 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 302 GE.

b) $k(x) = \dfrac{K(x)}{x} = x^2 - 30x + 527 \;\; ; x > 0$

c) Notwendige Bedingung:
$0 = k'(x) = 2x - 30 \Leftrightarrow x = 15$
Hinreichende Bedingung:
$k''(x) = 2 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 15$ glob. Min
d.h. werden 15 ME produziert, so sind die Stückkosten minimal.

d) $K_f(x) = 0$
d.h. die Fixkosten betragen null GE.

e) $p(x) = 470 \Leftrightarrow U(x) = 470x$
$G(x) = U(x) - K(x) = -x^3 + 30x^2 - 57x$
$G'(x) = -3x^2 + 60x - 57$
$G''(x) = -6x + 60$
Notwendige Bedingung:
$0 = -3x^2 + 60x - 57 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 20x + 19 \Leftrightarrow x = 10 \pm \sqrt{100 - 19} \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 19$
Hinreichende Bedingung:
$G''(1) = 54 > 0$ d.h. $x = 1$ lok Min
$G''(19) = -54 < 0$ d.h. $x = 19$ lok. Max
Da $G(0) = 0$ ist und da $G(19) = 2\,888$, ist $x = 19$ sogar ein glob. Max.

Lösung zu Aufgabe 2
v_1 = Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
v_2 = Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3 = Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE
v_4 = Bewertung in GE für eine in K_4 hergestellte LE

a) Kostengleichgewicht

$$\begin{array}{rlcl}
\text{I} & (10+20+30+40)v_1 - 20v_2 - 10v_3 - 40v_4 & = & 270 \\
\text{II} & (20+30+10+40)v_2 - 10v_1 - 20v_3 - 10v_4 & = & 50 \\
\text{III} & (10+20+30+90)v_3 - 20v_1 - 30v_2 - 10v_4 & = & 250 \\
\text{IV} & (40+10+10+60)v_4 - 30v_1 - 10v_2 - 30v_3 & = & 220
\end{array}$$

b) Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3	v_4	Primärkosten	Operation
1	100	−20	−10	−40	270	
2	−10	100	−20	−10	50	
3	−20	−30	150	−10	250	
4	−30	−10	−30	120	220	
5	10	−2	−1	−4	27	1 ÷ 10
6	$\boxed{-1}$	10	−2	−1	5	2 ÷ 10
7	−2	−3	15	−1	25	3 ÷ 10
8	−3	−1	−3	12	22	4 ÷ 10

9	-1	10	-2	-1	5	6
10	0	$\boxed{-23}$	19	1	15	7 $-2\cdot$ 6
11	0	-31	3	15	7	8 $-3\cdot$ 6
12	0	98	-21	-14	77	5 $+10\cdot$ 6
13	-1	10	-2	-1	5	9
14	0	-23	19	1	15	10
15	0	0	$\boxed{-520}$	314	-304	$23\cdot$ 11 $-31\cdot$ 10
16	0	0	$1\,379$	-224	$3\,241$	$23\cdot$ 12 $+98\cdot$ 10
17	-1	10	-2	-1	5	13
18	0	-23	19	1	15	14
19	0	0	-520	314	-304	15
20	0	0	0	$316\,526$	$1\,266\,104$	$520\cdot$ 16 $+1\,379\cdot$ 15

20 $316\,526 v_4 = 1\,266\,104 \Rightarrow v_4 = 4$
19 $-520 v_3 + 314\cdot 4 = -304 \Rightarrow v_3 = 3$
18 $-23 v_2 + 19\cdot 3 + 4 = 15 \Rightarrow v_2 = 2$
17 $-v_1 + 10\cdot 2 - 2\cdot 3 - 4 = 5 \Rightarrow v_1 = 5$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 5 GE, in K_2 genau 2 GE, in K_3 genau 3 GE und in K_4 genau 4 GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) NB: $4x + 6y = 24 \Rightarrow 4x + 6y - 24 = 0$

$L(x, y, \lambda) = 20x + 39y - 2x^2 - 3y^2 + \lambda(4x + 6y - 24)$

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 20 - 4x + 4\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -4 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 39 - 6y + 6\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -6 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= 4x + 6y - 24 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

I	0	$=$	$20 - 4x + 4\lambda$
II	0	$=$	$39 - 6y + 6\lambda$
III	0	$=$	$4x + 6y - 24$
$6\cdot\text{I} - 4\cdot\text{II}$	0	$=$	$-36 - 24x + 24y$
III	0	$=$	$4x + 6y - 24$
	0	$=$	$-36 - 24x + 24y - 4\cdot(4x + 6y - 24) = 60 - 40x$
	$\Rightarrow x = \frac{60}{40} = 1{,}5$		
III	0	$=$	$4\cdot 1{,}5 + 6y - 24 \Rightarrow y = 3$
I	0	$=$	$20 - 4\cdot 1{,}5 + 4\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = -3{,}5$

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; -3{,}5) = (-4)\cdot(-6) - 0^2 = 24 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x; y; -3{,}5) = -4 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x, y)$ hat in $(1{,}5\,; 3)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

b) NB: $x = 0{,}2\cdot y \Rightarrow x - 0{,}2y = 0$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $A = (i+t) \cdot K_0 = (0{,}042 + 0{,}01) \cdot 150\,000 = 7\,800$
d.h. die Annuitäten betragen 7 800 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{150\,000}{7\,800} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 40{,}0725$
d.h. es sind 40 volle Annuitäten zu leisten.

c) $K_{20} = 150\,000 \cdot 1{,}042^{20} - 7\,800 \cdot \dfrac{1{,}042^{20} - 1}{0{,}042} = 104\,394{,}50$
$Z_{21} = K_{20} \cdot i$
$T_{21} = A - Z_{21}$
$K_{21} = K_{20} - T_{21}$

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
21	4 384,57	3 415,43	7 800	100 979,00

d) $K_{40} = 150\,000 \cdot 1{,}042^{40} - 7\,800 \cdot \dfrac{1{,}042^{40} - 1}{0{,}042} = 552{,}77$
$552{,}77 \cdot 1{,}042 = 575{,}99$
d.h. die Zahlung beträgt 575,99 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:
Barwert der Schulden am 01.01.2010: $K_0 = 10\,000 + \dfrac{20\,000}{1{,}042^4} + \dfrac{15\,000}{1{,}042^5} = 39\,176{,}25$

a) Die Laufzeit der vorschüssigen Quartalsrente beträgt genau sechs Jahre.
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$39\,176{,}25 = r_J \cdot \dfrac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^6} \Rightarrow r_J = 7\,522{,}065$
Vorschüssige Quartalsraten r'_Q:
$7\,522{,}065 = r'_Q \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}042\right) \Rightarrow r'_Q = 1\,832{,}42$
d.h. die Quartalsraten betragen 1 832,42 Euro.
2. Lösungsweg:
$r'_Q = 39\,176{,}25 \cdot 1{,}042^6 \cdot \dfrac{0{,}042}{(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) \cdot (1{,}042^6 - 1)} = 1\,832{,}42$

b) Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = 12\,273$
Laufzeit n in Jahren:
$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{39\,176{,}25}{12\,273} \cdot 0{,}042]}{\ln 1{,}042} = 3{,}498803$
3,498803 Jahre $= 3{,}498803 \cdot 12 = 41{,}98564$ Monate
d.h. es sind 41 volle Monatsbeträge zu zahlen.

c) $39\,176{,}25 = x + \dfrac{x}{1{,}042^4} + \dfrac{x}{1{,}042^6} = 2{,}629517 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{39\,176{,}25}{2{,}629517} = 14\,898{,}65$
d.h. die drei gleich hohen Rückzahlungen betragen 14 898,65 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6
Der Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2029 beträgt 20 Jahre.

a) $200\,000 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04} \Rightarrow r_M = 549{,}62$
d.h. die monatlichen Einzahlungen betragen 549,62 GE.

b) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019:
$r_j = r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 12{,}22 \cdot r_M$
$R_{10} = 12{,}22 \cdot r_M \cdot \dfrac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 146{,}7146 \cdot r_M$
Nachschüssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2020 bis 31.12.2029:
$r_j = 1{,}02 \cdot r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 12{,}4644 \cdot r_M$
$R_{10} = 12{,}4644 \cdot r_M \cdot \dfrac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 149{,}6489 \cdot r_M$
Kontostand am 31.12.2029:
$200\,000 = 146{,}7146 \cdot 1{,}04^{10} \cdot r_M + 149{,}6489 \cdot r_M = 217{,}1735 \cdot r_M + 149{,}6489 \cdot r_M = 366{,}8224 \cdot r_M \Rightarrow r_M = 545{,}223$
$1{,}02 \cdot 545{,}223 = 556{,}1274$
d.h. vor der Erhöhung betragen die Monatsraten 545,22 GE, und nach der Erhöhung 556,13 GE.

c) Nachschüssige Ersatz-Jahresrente im Zeitraum 01.01.2010 bis 31.12.2019:
$r_j = 520 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) = 6\,354{,}4$
$R_{10} = 6\,354{,}4 \cdot \dfrac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 76\,291{,}6$
Kontostand am 31.12.2029:
$200\,000 = 76\,291{,}6 \cdot 1{,}04^{10} + r_M \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 112\,930{,}2 + 146{,}7146 \cdot r_M$
$87\,069{,}78 = 146{,}7146 \cdot r_M \Rightarrow r_M = 593{,}4636$
$\dfrac{593{,}4636}{520} = 1{,}141276$
d.h. die Monatsrente von 520 GE ist um etwa 14,13 % zu erhöhen auf 593,46 GE.