Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 31.01.2013
Finanzmathematik-Klausur vom 06.02.2013

Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2004:	Aufgaben 2,3,4	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2007:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang Int. Bus. (Ba) PO 2010:	Aufgaben 1,2,3	Dauer der Klausur: 60 Min
Studiengang BWL (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang B&FI (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE DPO 2004:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min
Studiengang WRE (Ba) PO 2007:	Aufgaben 5,6,7,8	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Es bezeichnen x die Absatzmenge eines Gutes (in ME) und p den Verkaufspreis (in GE) des Gutes pro ME. Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der der Stelle $p = 40$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:
$$x(p) = 480 - 8p \ ; p \in [0; 60]$$

b) Begründen Sie, warum in Teilaufgabe a) der Preis ökonomisch sinnvoll nur im Intervall [0;60] gewählt werden kann.

c) A, B, C seien 4×4-Matrizen und E die 4×4-Einheitsmatrix. Reduzieren Sie die nachfolgenden Terme so, dass die Anzahl der erforderlichen Matrizenmultiplikationen minimal ist:

1. $A(2B + C) - 3AC$
2. $3(AB + 2CA) - 6AC$
3. $A(B + E) - E(A - B)B$

Aufgabe 2
Für die Produktion der drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 beträgt der Gesamtbedarf (in ME) an Rohmaterialien R_1, R_2, R_3 für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2	E_3
R_1	10	0	201
R_2	40	5	303
R_3	12	1	141

Im Lager befindet sich der folgende Vorrat (in ME) an Rohmaterial:

R_1	R_2	R_3
5 000	12 000	4 400

Um festzustellen, wie viele ME der Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, gehen Sie bitte wie folgt vor:

a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

c) Geben Sie alle nicht negativen Lösungen an.

d) Geben Sie alle ganzzahligen nicht negativen Lösungen an. Wie viele ME der Endprodukte lassen sich aus dem Vorrat herstellen?

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 2y^2 - x \cdot y + 100 \ \ ; x, y \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die lokalen (streng relativen) Extremstellen und die Sattelstellen dieser Funktion.

b) Zeigen Sie, dass diese Funktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$x + y = 9$$

an der Stelle $(x, y) = (3, 6)$ ein lokales (streng relatives) Minimum hat.

Aufgabe 4
Eine mit 9% p.a. zu verzinsende Schuld in Höhe von 200 000 Euro soll vom Ende des ersten Jahres an durch jährliche Zahlungen in Höhe von 20 000 Euro zurück gezahlt werden.

a) Wie hoch ist der erste Tilgungssatz und wie hoch ist der erste Tilgungsbetrag?

b) Wie viele Annuitäten können in voller Höhe geleistet werden?

c) Wie hoch wären monatlich vorschüssige Rückzahlungsbeträge bei nach wie vor 9% Jahreszinsen ausgefallen? (Erster monatlicher Rückzahlungsbetrag fällig bei Kreditaufnahme.)

Aufgabe 5
Auf ein Konto werden folgende Beträge eingezahlt:

- 10 000 Euro am 31.12.2013
- 20 000 Euro am 31.12.2015
- 30 000 Euro am 31.12.2016

Aus diesen Einzahlungen soll eine jährliche Rente über 5 000 Euro finanziert werden, erste Rentenauszahlung ist fällig am 01.01.2020. Der Jahreszins beträgt 1,2%.

a) Wie hoch ist der Barwert der Rente?

b) Wie oft kann die volle Jahresrente ausgezahlt werden?

c) Wie hoch ist das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung?

Aufgabe 6

Ein Druck-Unternehmen überlegt die Anschaffung einer neuen Maschine. Es stehen drei Alternativen zur Diskussion. Sie bekommen von der Geschäftsführung die Aufgabe, die sinnvollste Alternative auszuwählen.
Von der Geschäftsführung wird ein Kalkulationszins von 10% p.a. (Erwartungszins) angesetzt. Ferner wird von der Geschäftsführung vorgegeben, dass nur solche Alternativen in Betracht kommen, bei denen spätestens zum Ende des dritten Jahres die Summe der aufgezinsten Überschüsse die aufgezinste Investitionssumme übertrifft.
Für die drei Alternativen gelten folgende Daten (Werte in €):

Alternative	Anschaffungs-auszahlung	Überschüsse			
		1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
A	50 000	20 000	15 000	10 000	40 000
B	50 000	25 000	10 000	15 000	25 000
C	50 000	15 000	35 000	15 000	5 000

Dabei erfolgt die Wertstellung der Überschüsse zum jeweiligen Jahresende.

a) Welche Alternative wählen Sie aus, wenn Sie sich an die Vorgaben der Geschäftsführung halten?

b) Welche Alternative wählen Sie aus, wenn es um eine Entscheidung auf Basis des Kapitalwerts bezogen auf die Überschüsse der ersten vier Jahre ginge?

Aufgabe 7

a) Bei einer Investitionsrechnung wird als Kalkulationszins ein HABEN-Zins eingesetzt, d.h. ein Zins wie er auch bei einer Geld-Anlage „auf der Bank“ gewährt wird. Das Ergebnis für den Kapitalwert beträgt $K_0 = 0$. Welche (eventuell alternativen) Konsequenzen hat dieses Ergebnis?

b) Da eine dringend notwendige Investition mit einem Kredit finanziert werden muss, wird in einer Investitionsrechnung als Kalkulationszinsfuß ein SOLL-Zins (d.h. der Kreditzins) eingesetzt. Das Ergebnis für den Kapitalwert beträgt $K_0 = 0$. Welche (eventuell alternativen) Konsequenzen hat dieses Ergebnis?

c) Eine Investition wird von der Geschäftsleitung nur genehmigt werden, wenn mindestens ein vorgegebener erwarteter Zins (Erwartungszins) erwirtschaftet wird. Bei einer Investitionsrechnung mit diesem Erwartungszins als Kalkulationszins ergibt sich als Ergebnis für den Kapitalwert $K_0 = 0$. Welche Konsequenz hat dieses Ergebnis hinsichtlich der Genehmigung dieser Investition?

Aufgabe 8

a) Her Müller hat zum 31.12.2009 bei der ABC-Bank ein Giro-Konto eröffnet. Die Guthabenzinsen betragen in allen Jahren konstant 1,5% pro Jahr, die Überziehungszinsen konstant 9,6% pro Jahr. In den Jahren 2009 bis 2012 gab es folgende Kontobewegungen:

   - 31.12.2009: Einzahlung von 2 000 €

- 31.03.2010: Einzahlung von 5 000 €
- 31.01.2011: Abhebung von 10 000 €
- 31.03.2012: Einzahlung von 4 000 €

Berechnen Sie die Kontostände jeweils zum Ende (31.12.) der Jahre 2010, 2011 und 2012. Verwenden Sie als Zinsmodell die monatliche Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zinssatz.

b) Frau Meier hat zum 31.12.2009 bei der XYZ-Bank ein Giro-Konto eröffnet. Die Guthabenzinsen betragen in allen Jahren konstant 1,5% pro Jahr. Der Zinssatz der Überziehungszinsen ist im relevanten Zeitraum ebenfalls konstant. In den Jahren 2009 bis 2012 gab es folgende Kontobewegungen:

- 31.12.2009: Einzahlung von 5 000 €
- 30.06.2010: Einzahlung von 7 000 €
- 30.06.2011: Einzahlung von 8 000 €
- 31.03.2012: Abhebung von 24 000 €

Zum Ende des Jahres 2012 muss Frau Meier der XYZ-Bank 319,80 € als Überziehungszinsen bezahlen. Wie hoch ist der jährliche nominelle Zinssatz für die Überziehungszinsen. Verwenden Sie als Zinsmodell die monatliche Verzinsung mit Zinseszins zum relativen Zinssatz.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $x'(p) = -8$
$\varepsilon_x(40) = (-8) \cdot \dfrac{40}{480 - 8 \cdot 40} = -2$
d.h. wird der Verkaufspreis von 40 GE um ein Prozent erhöht, so sinkt der Absatz um 2%.

b) Damit der Verkaufspreis p nicht negativ ist, muss gelten $p \geq 0$. Damit die Absatzmenge x nicht negativ ist, muss gelten $x \geq 0$. Das ist äquivalent zu $0 \leq x = 480 - 8p \Leftrightarrow p \leq 60$.

c)
1. $A(2B + C) - 3AC = 2AB + AC - 3AC = 2A(B - C)$
2. $3(AB + 2CA) - 6AC = 3AB + 6CA - 6AC = 3A(B - 2C) + 6CA$
3. $A(B + E) - E(A - B)B = AB + A - AB + BB = A + BB$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) e_i=ME von E_i für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 10e_1 + 201e_3 & = & 5\,000 \\ \text{II} & 40e_1 + 5e_2 + 303e_3 & = & 12\,000 \\ \text{III} & 12e_1 + e_2 + 141e_3 & = & 4\,400 \end{array}$$

Gaußalgorithmus

Zeile	e_1	e_2	e_3	r	Operation
1	$\boxed{10}$	0	201	5 000	
2	40	5	303	12 000	
3	12	1	141	4 400	
4	10	0	201	5 000	1
5	0	$\boxed{5}$	−501	−8 000	2 − 4 · 1
6	0	5	−501	−8 000	5 · 3 − 6 · 1
7	10	0	201	5 000	4
8	0	5	−501	−8 000	5
9	0	0	0	0	6 − 5

8 $\quad 5e_2 - 501e_3 = -8\,000 \;\Leftrightarrow e_2 = 100{,}2e_3 - 1\,600$
7 $\quad 10e_1 + 201e_3 = 5\,000 \Leftrightarrow e_1 = 500 - 20{,}1e_3$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 500 - 20{,}1e_3 \\ 100{,}2e_3 - 1\,600 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Nicht negative Lösungen:
$e_1 = 500 - 20{,}1e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 500 \geq 20{,}1e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq 24{,}87562$
$e_2 = 100{,}2e_3 - 1\,600 \geq 0 \Leftrightarrow 100{,}2e_3 \geq 1\,600 \Leftrightarrow e_3 \geq 15{,}96806$
$e_3 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 500 - 20{,}1e_3 \\ 100{,}2e_3 - 1\,600 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in [15{,}97\,;\, 24{,}88] \right\}$$

d) Ganzzahlige nicht negative Lösungen:
$e_3 = 20 \Rightarrow e_1 = 98$ und $e_2 = 404$
d.h. aus dem Vorrat können 98 ME von E_1, 404 ME von E_2 und 20 ME von E_3 hergestellt werden.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $f_x(x,y) = 3x^2 - y \quad f_{xx}(x,y) = 6x$
$f_y(x,y) = 4y - x \quad f_{yy}(x,y) = 4$
$f_{xy}(x,y) = -1$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 3x^2 - y \\ \text{II} & 0 & = & 4y - x \\ \hline 4 \cdot \text{I} + \text{II} & 0 & = & 12x^2 - x = 12x(x - \frac{1}{12}) \end{array} \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{12}$$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow \text{II}\ 0 = 4y \Leftrightarrow y = 0$
2. Fall: $x = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \text{II}\ 0 = 4y - \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{48}$

d.h. (0;0) und $(\frac{1}{12}; \frac{1}{48})$ sind stationäre Punkte.

Hinreichende Bedingung:
$D(x;y) = 6x \cdot 4 - (-1)^2 = 24x - 1$
$D(0;0) = -1 < 0$ d.h. (0;0) ist eine Sattelstelle
$D(\frac{1}{12};\frac{1}{48}) = 1 > 0$ und $f_{xx}(\frac{1}{12};\frac{1}{48}) = \frac{1}{2} > 0$
d.h. $(\frac{1}{12};\frac{1}{48})$ ist eine lokale Minimalstelle.

b) *Lösungsweg:* Einsetz-Methode
NB $x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - x$
Setze $f(x) = x^3+2(9-x)^2-x(9-x)+100 = x^3+162-36x+2x^2-9x+x^2+100 = x^3 + 3x^2 - 45x + 262$
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$
$f''(x) = 6x + 6$
Notwendige Bedingung:
$f'(3) = 3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 - 45 = 27 + 18 - 45 = 0$
Hinreichende Bedingung:
$f''(3) = 6 \cdot 3 + 6 > 0$
$y = 9 - 3 = 6$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(3\,;\,6)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.
2. Lösungsweg: Lagrange-Methode:
$L(x,y,\lambda) = x^3 + 2y^2 - xy + 100 + \lambda(x + y - 9)$

$$\begin{array}{lcl} L_x(x,y,\lambda) &=& 3x^2 - y + \lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 4y - x + \lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x + y - 9 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 6x \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 4 \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& -1 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:
Da (3;6) gemäß der Aufgabenstellung ein stationärer Punkt ist, muss gelten:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 0 &=& 3 \cdot 9 - 6 + \lambda = 21 + \lambda \quad \Leftrightarrow \lambda = -21 \\ \text{II} & 0 &=& 4 \cdot 6 - 3 + \lambda = 21 + \lambda \quad \Leftrightarrow \lambda = -21 \\ \text{III} & 0 &=& 6 + 3 - 9 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(3;6;-21) = 6 \cdot 3 \cdot 4 - (-1)^2 = 72 - 1 > 0$
$L_{xx}(3;6;-21) = 6 \cdot 3 = 18 > 0$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(3\,;\,6)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\dfrac{20\,000}{200\,000} = 0{,}1 = 10\%$ Prozentannuität
$10\% - 9\% = 1\%$
$200\,000 \cdot 0{,}01 = 2\,000$
d.h. der erste Tilgungssatz beträgt 1%, die erste Tilgungsrate beträgt 2 000 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{20\,000} \cdot 0{,}09\right]}{\ln(1{,}09)} = 26{,}7$
d.h. es sind 26 volle Annuitäten zu zahlen.

c) $20\,000 = r'_M(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}09) \Rightarrow r'_M = 1\,589{,}19$
d.h. monatlich vorschüssige Raten betragen 1 589,19 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $10\,000 \cdot 1{,}012^6 + 20\,000 \cdot 1{,}012^4 + 30\,000 \cdot 1{,}012^3 = 62\,812{,}38$
d.h. der Rentenbarwert beträgt 62 812,38 Euro.

b) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{62\,812{,}38}{5\,000 \cdot 1{,}012} \cdot 0{,}012\right]}{\ln 1{,}012} = 13{,}52205$
d.h. die volle Rente kann dreizehnmal ausgezahlt werden.

c) $62\,812{,}38 \cdot 1{,}012^{13} - 5\,000 \cdot 1{,}012 \cdot \dfrac{1{,}012^{13} - 1}{0{,}012} = 2\,617{,}674$
d.h. das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung beträgt 2 617,67 Euro.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Nennwert der ersten drei Periodenüberschüsse von Alternative A:
$20\,000 + 15\,000 + 10\,000 = 45\,000 < 50\,000$
Nennwert der ersten drei Periodenüberschüsse von Alternative B:
$25\,000 + 10\,000 + 15\,000 = 50\,000 = 50\,000$
Nennwert der ersten drei Periodenüberschüsse von Alternative C:
$15\,000 + 35\,000 + 15\,000 = 65\,000 > 50\,000$
d.h. nur die Investition in Alternative C könnte sich lohnen. Genauer gilt:
$K_0^C = \dfrac{15\,000}{1{,}10} + \dfrac{35\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^3} - 50\,000 = 3\,831{,}71 > 0$
d.h. der Kapitalwert ist positiv, somit lohnt sich die Investition.

b) $K_0^A = \dfrac{20\,000}{1{,}10} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{10\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{40\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 15\,412{,}20$
$K_0^B = \dfrac{25\,000}{1{,}10} + \dfrac{10\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{25\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 9\,336{,}79$
$K_0^C = \dfrac{15\,000}{1{,}10} + \dfrac{35\,000}{1{,}10^2} + \dfrac{15\,000}{1{,}10^3} + \dfrac{5\,000}{1{,}10^4} - 50\,000 = 7\,246{,}77$
d.h. die Alternative A ist vorteilhafter als B und C.

Lösung zu Aufgabe 7:
Beträgt der Kapitalwert null, so sollten nicht-monetäre Kriterien wie Erhalt von Arbeitsplätzen, Modernisierung, Umsatzsteigerung etc. herangezogen werden, um zu entscheiden, ob investiert werden soll oder nicht.

a) Es könnte investiert werden oder das Geld in Höhe der Anschaffungskosten könnte auf einer Bank angelegt werden.

b) Rein rechnerisch lohnt sich die Investition nicht, es könnte aber auch investiert werden.

c) Wenn lediglich der Erwartungszins erfüllt sein soll, so könnte investiert werden.

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Kontostand am 31.12.2010:

$$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{12} + 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} = 7\,086{,}74$$

Kontostand am 31.12.2011:

$$\left(7\,086{,}74 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right) - 10\,000\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}096}{12}\right)^{11} = -3\,170{,}46$$

Kontostand am 31.12.2012:

$$\left(-3\,170{,}46 \cdot \left(1 + \frac{0{,}096}{12}\right)^{3} + 4\,000\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} = 761{,}35$$

b) Guthaben am 31.03.2012:

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{27} + 7\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{21} + 8\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}015}{12}\right)^{9} - 24\,000 =$$

$$20\,448{,}04 - 24\,000 = -3\,551{,}96$$

Schulden am 31.12.2012 mit Überziehungszinssatz i:

$$3\,551{,}96 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{9} = 319{,}68 + 3\,551{,}96 = 3\,871{,}64$$

Division durch $3\,551{,}96$ ergibt:

$$\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{9} = 1{,}090001$$

Neunte Wurzel ziehen ergibt:

$$1 + \frac{i}{12} = 1{,}009621$$

Minus eins mal zwölf ergibt:

$$i = 0{,}009621 \cdot 12 = 0{,}1154567$$

d.h. der gesuchte Überziehungszins beträgt 11,55% pro Jahr.