Mathematik-Klausur vom 5.10.2004

Aufgabe 1 (Vorlesung Wirtschaftsmathematik 1)
Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ eines Monopolisten mit :

$$K(x) = 5{,}5x^2 - 26x + 31 \ \ ; x \in [0; 20]$$

Die produzierte Menge x kann am Markt gemäß der folgenden Preis-Absatz Funktion $p(x)$ abgesetzt werden:

$$p(x) = 10 - 0{,}5x \ \ ; x \in [0; 20]$$

a) Berechnen Sie die Gewinnfunktion und geben Sie die Gewinn- und Verlustzonen an. (Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn und den dazugehörigen Gewinn-maximalen Preis.

c) Für welchen Preis sind die Gesamtkosten des Monopolisten minimal? (Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.)

d) Angenommen der Staat erhebt eine Steuer in Höhe von 20% auf den erzielten Gewinn. Wie verändert sich hierdurch die Gewinn-maximale Ausbringungsmenge? (Begründung!)

Lösung zu Aufgabe 1

a) Umsatz $U(x) = p(x) \cdot x = 10x - 0{,}5x^2$
Gewinn $G(x) = U(x) - K(x) = -6x^2 + 36x - 31$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x^2 + 36x - 31 \quad | \div(-6) \\ 0 &= x^2 - 6x + \tfrac{31}{6} \end{aligned}$$

$x = 1{,}04$ oder $x = 4{,}96$
$G(0) = -31$
Gewinnzone $= (1{,}04 \ ; \ 4{,}96)$
Verlustzone $= [0; 1{,}04) \cup (4{,}96; 20]$

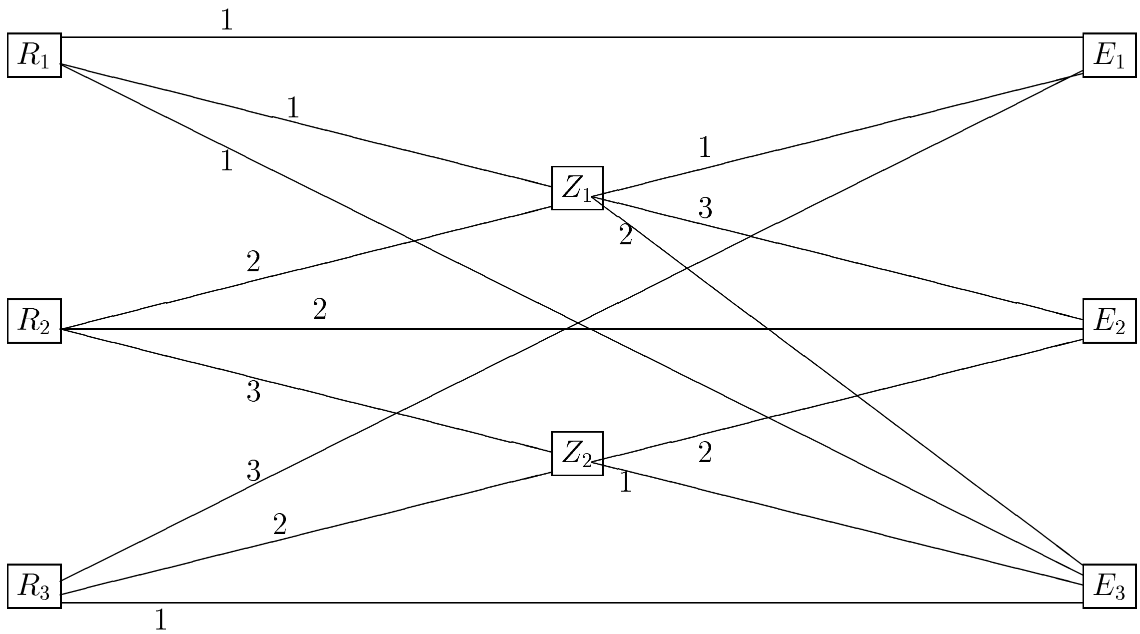
b) $G'(x) = -12x + 36$
$G''(x) = -12$
Notw. Bed.
$0 = G'(x) = -12x + 36 \Rightarrow x = 3$
Hinr. Bed.
$G''(x) = -12 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 3$ glob. Max
$G(3) = 24$
$p(3) = 8{,}5$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 24 GE und der Gewinn-maximale Preis beträgt 8,50 GE.

c) $K'(x) = 11x - 26$
$K''(x) = 11$

Notw. Bed.
$0 = K'(x) = 11x - 26 \Rightarrow x = 2{,}36$
Hinr. Bed.
$K''(x) = 11 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 2{,}36$ glob. Min.
$p(2{,}36) = 8{,}82$
d.h. die Kosten sind minimal für den Stück-Verkaufspreis von 8,82 GE.

d) Gewinn $G(x) = 0{,}8 \cdot (-6x^2 + 36x - 31) = -4{,}8x^2 + 28{,}8x - 24{,}8$
$G'(x) = -9{,}6x + 28{,}8$
$G''(x) = -9{,}6$
Notw. Bed.
$0 = G'(x) = -9{,}6x + 28{,}8 \Rightarrow x = 3$
Hinr. Bed.
$G''(x) = -9{,}6 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 3$ glob. Max
d.h. die Gewinn-maximale Menge verändert sich gegenüber Aufgabenteil b) nicht.

Aufgabe 2 (Vorlesung Wirtschaftsmathematik 2)
In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Rohmaterialien R_1, R_2, R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und anschließend die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Der Matrialfluss ist in folgender Grafik dargestellt:



a) Stellen Sie den Materialfluss dar in Matrizen, die den Direktbedarf (Produktionsmatrizen) angeben.

b) Berechnen Sie den Gesamtbedarf an Rohstoffen R_1, R_2, R_3 für die Herstellung jeweils einer Mengeneinheit von E_1, E_2, E_3.

c) Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 werden benötigt, um 100 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 300 ME von E_3 herzustellen?

d) Im Lager befindet sich folgender Vorrat (in ME) an Rohstoffen:

	Vorrat
R_1	800
R_2	2 300
R_3	1 000

Wie viele Mengeneinheiten der Endprodukte E_1, E_2, E_3 lassen sich aus dem Vorrat herstellen, wenn der Vorrat vollständig aufgebraucht werden soll?

Lösung zu Aufgabe 2

a) Direktbedarf

$$\begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ \hline R_1 & 1 & 0 \\ R_2 & 2 & 3 \\ R_3 & 0 & 2 \end{array} = A \qquad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 1 & 3 & 2 \\ Z_2 & 0 & 2 & 1 \end{array} = B \qquad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline R_1 & 1 & 0 & 1 \\ R_2 & 0 & 2 & 0 \\ R_3 & 3 & 0 & 1 \end{array} = C$$

b) Gesamtbedarf $M = A \cdot B + C = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline R_1 & 2 & 3 & 3 \\ R_2 & 2 & 14 & 7 \\ R_3 & 3 & 4 & 3 \end{array}$

c) $M \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,700 \\ 5\,100 \\ 2\,000 \end{bmatrix}$

d.h. es werden 1 700 ME von R_1, 5 100 ME von R_2 und 2 000 ME von R_3 benötigt.

d) e_1 = ME von E_1
e_2 = ME von E_2
e_3 = ME von E_3

$$M \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 2\,300 \\ 1\,000 \end{bmatrix}$$

Gaußalgorithmus

Zeile	q_1	q_2	q_3		Operation
1	$\boxed{2}$	3	3	800	
2	2	14	7	2 300	
3	3	4	3	1 000	
4	2	3	3	800	1
5	0	11	4	1 500	2 − 1
6	0	$\boxed{-1}$	−3	−400	2 · 3 − 3 · 1
7	2	3	3	800	4
8	0	−1	−3	−400	6
9	0	0	−29	−2 900	5 + 11 · 6

9 $-29e_3 = -2\,900 \Rightarrow e_3 = 100$
8 $-e_2 - 300 = -400 \Rightarrow e_2 = 100$
7 $2e_1 + 300 + 300 = 800 \Rightarrow e_1 = 100$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

d.h. aus dem Vorrat können jeweils 100 ME von E_1 bzw. E_2 bzw. E_3 hergestellt werden.

Aufgabe 3 (Vorlesung Finanzmathematik 1)
Ein Unternehmen möchte zum 1.1.2005 einen Betrag von 200 000 GE investieren. Dazu stehen drei Investitionsalternativen zur Auswahl. Die Rückflüsse werden wie folgt erwartet:

Alternative A:

Datum	Betrag
31.12.2005	80 000 GE
30.06.2006	35 000 GE
31.12.2006	50 000 GE
30.06.2007	50 000 GE

Alternative B:

Datum	Betrag
30.09.2005	50 000 GE
30.06.2006	50 000 GE
31.08.2006	60 000 GE
31.12.2006	60 000 GE

Alternative C:

Datum	Betrag
31.03.2005	30 000 GE
31.12.2005	80 000 GE
30.06.2006	50 000 GE
31.12.2006	55 000 GE

Beurteilen Sie die drei Investitionsalternativen mit der Kapitalwertmethode. Geben Sie eine Rangfolge bezüglich der Vorteilhaftigkeit der Investitionen an. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 4,5% aus.

Lösung zu Aufgabe 3
Kapitalwert der Alternative A:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{80\,000}{1{,}045} + \frac{35\,000}{1{,}045\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{50\,000}{1{,}045^2} + \frac{50\,000}{1{,}045^2\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} - 200\,000 \\ &= 76\,555{,}02 + 32\,755{,}82 + 45\,786{,}50 + 44\,778{,}97 - 200\,000 \\ &= 199\,876{,}31 - 200\,000 \\ &= -123{,}69 \end{aligned}$$

Kapitalwert der Alternative B:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{50\,000}{1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}045} + \frac{50\,000}{1{,}045\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{60\,000}{1{,}045\left(1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{60\,000}{1{,}045^2} - 200\,000 \\ &= 48\,367{,}59 + 46\,794{,}02 + 55\,743{,}95 + 54\,943{,}80 - 200\,000 \\ &= 205\,849{,}36 - 200\,000 \\ &= +5\,849{,}36 \end{aligned}$$

Kapitalwert der Alternative C:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{30\,000}{1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}045} + \frac{80\,000}{1{,}045} + \frac{50\,000}{1{,}045\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}045\right)} + \frac{55\,000}{1{,}045^2} - 200\,000 \\ &= 29\,666{,}26 + 76\,555{,}02 + 46\,794{,}02 + 50\,365{,}15 - 200\,000 \\ &= 203\,380{,}45 - 200\,000 \\ &= +3\,380{,}45 \end{aligned}$$

d.h. am vorteilhaftesten ist Alternative B gefolgt von Alternative C, nicht vorteilhaft ist Alternative A.

Aufgabe 4 (Vorlesung Finanzmathematik 1)
Eine Familie mit 60 000 € Eigenkapital kauft ein Haus für 250 000 €. Für den fehlenden Betrag nimmt sie einen Kredit auf. Für den Kredit vereinbart sie folgende Rückzahlung:

Für die ersten zehn Jahre Prozent-Annuitätentilgung mit

- 5,1% Jahreszins
- 3% erster Tilgungssatz

anschließend neue Prozent-Annuitätentilgung mit

- 4,9% Jahreszins
- 2% erster Tilgungssatz der neuen Prozent-Annuitätentilgung

a) Wie hoch ist die erste Annuität?

b) Wie hoch ist die Restschuld am Ende des 10. Jahres?

c) Wie hoch ist die Annuität am Ende des 11. Jahres?

d) In welchem Jahr nach Kreditaufnahme erfolgt die letzte volle Rückzahlung?

e) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Lösung zu Aufgabe 4
Kredit $= 250\,000 - 60\,000 = 190\,000$

a) $A_1 = (0{,}03 + 0{,}051) \cdot 190\,000 = 15\,390$
d.h. die erste Annuität beträgt 15 390 €.

b) $K_{10} = 190\,000 \cdot 1{,}051^{10} - 15\,390 \cdot \dfrac{1{,}051^{10} - 1}{0{,}051} = 117\,970{,}49$
d.h. die Restschuld nach zehn Jahren beträgt 117 970,49 €

c) $A_{11} = (0{,}02 + 0{,}049) \cdot 117\,970{,}49 = 8\,139{,}96$
d.h. die elfte Annuität beträgt 8 139,96 €.

d) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{117\,970{,}49}{8\,139{,}96} \cdot 0{,}049\right]}{\ln 1{,}049} = 25{,}89$
d.h. am Ende des 35. Jahres erfolgt die letzte volle Rückzahlung.

e) $K_{25} = 117\,970{,}49 \cdot 1{,}049^{25} - 8\,139{,}96 \cdot \frac{1{,}049^{25} - 1}{0{,}049} = 6\,903{,}03$
$6\,903{,}03 \cdot 1{,}049 = 7\,241{,}28$
d.h. die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt 7 241,28 €.

Aufgabe 5 (Vorlesung Lineare Optimierung DPO 1997 und DPO 2001)
Gegeben sei ein Transportproblem mit folgendem Tableau der Kosten (in GE) und der Vorrats- und Bedarfsmengen (in ME):

	Verbrauchsort			
	1	2	3	Vorrat
Lieferant 1	4 GE	2 GE	5 GE	4 ME
Lieferant 2	6 GE	7 GE	3 GE	1 ME
Lieferant 3	2 GE	3 GE	2 GE	1 ME
Bedarf	2 ME	1 ME	3 ME	

a) Bestimmen Sie mit der Vogelschen Approximationsmethode eine zulässige Ausgangslösung.

b) Bestimmen Sie, ausgehend von der Lösung von a), die optimale Lösung. Wie hoch sind die minimalen Transportkosten?

c) Der Lieferant 2 mit einem Vorrat von einer Mengeneinheit fällt kurzfristig aus. Zum Ausgleich ist der Lieferant 1 in der Lage, seinen derzeitigen Vorrat von vier Mengeneinheiten auf fünf Mengeneinheiten zu erhöhen. Lieferant 3 hat weiterhin einen Vorrat von einer Mengeneinheit.
Bestimmen Sie den optimalen Transportplan. Wie hoch sind nun die minimalen Transportkosten?

Lösung zu Aufgabe 5

a) Überprüfung der Angebots- und Nachfragemengen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vorratsmenge} = 6 \text{ ME}\\ \text{Bedarfsmenge} = 6 \text{ ME}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{okay}$$

	V_1	V_2	V_3	a_i	d_i	
L_1	4	2	5	4	2	2
L_2	6	7	3	$\cancel{1}0$	$\boxed{3}$	–
L_3	2	3	2	$\cancel{1}0$	0	0
b_j	2	1	$\cancel{3}$	6		
			$\cancel{2}$			
			1			
d_j	2	1	1			
	2	1	$\boxed{3}$			

TP-Plan:

	V_1	V_2	V_3	u_i
L_1	4 $\boxed{2}$	2 $\boxed{1}$	5 $\boxed{1}$	$u_1 = 0$
L_2	6	7	3 $\boxed{1}$	-2
L_3	2	3	2 $\boxed{1}$	-3
v_j	4	2	5	

b) insb. betragen die TP-Kosten 8+2+5+3+2=20 GE.

Nichtbasisvariable	Opp.kosten
x_{21}	4
x_{22}	7
x_{31}	1
x_{32}	4

d.h. die Ausgangslösung unter a) ist optimal (jedoch nicht eindeutig).

c) Überprüfung der Angebots- und Nachfragemengen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vorratsmenge} = 6 \text{ ME}\\ \text{Bedarfsmenge} = 6 \text{ ME}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{okay}$$

	V_1	V_2	V_3	a_i	d_i
L_1	4	2	5	5	2
L_3	2	3	2	$\cancel{1}0$	0
b_j	2	1	$\cancel{3}$ 2	6	
d_j	2	1	$\boxed{3}$		

TP-Plan:

	V_1	V_2	V_3	u_i
L_1	4 $\boxed{2}$	2 $\boxed{1}$	5 $\boxed{2}$	$u_1 = 0$
L_3	2	3	2 $\boxed{1}$	-3
v_j	4	2	5	

insb. betragen die TP-Kosten 8+2+10+2=22 GE.

Nichtbasisvariable	Opp.kosten
x_{21}	1
x_{22}	4

d.h. die Lösung ist optimal.