

# Statistik-Klausur vom 2. Februar 2006

Bearbeitungszeit. 90 Minuten

## Aufgabe 1

- a) In einem Unternehmen mit 29 Außendienstmitarbeitern wird eine Statistik über die Anzahl der im abgelaufenen Quartal abgeschlossenen Verträge aufgestellt. Für die statistische Variable „Anzahl der Aufträge eines Außendienstlers“ ergibt sich:

Anzahl der Aufträge	Anzahl der Außendienstler
0	2
1	6
2	8
3	9
4	3
5	1
Summe	29

1. Ist die statistische Variable stetig oder diskret? Wie ist die statistische Variable skaliert?
  2. Geben Sie den Modus und den Median der statistischen Variable an.
- b) Gegeben sei die Zufallsvariable  $X$  mit dem Wertebereich  $\{0, 1, 2, 3\}$  und den Einzelwahrscheinlichkeiten:  $P(X = 0) = 0,3$ ;  $P(X = 1) = 0,4$ ;  $P(X = 2) = 0,25$ ;  $P(X = 3) = 0,05$ .  
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .

## Aufgabe 2

Der Fleischkonsum der Deutschen in Kilogramm

	1950	1975	1985	1995	2000	2002	2003	2004
Rind- und Kalbfleisch	9,0	15,3	15,1	11,4	9,6	8,2	8,6	8,7
Schweinefleisch	13,9	31,9	41,8	39,6	39,1	39,0	39,5	39,3
Geflügelfleisch	0,7	5,4	5,6	8,0	9,5	10,3	10,5	10,6
Schaffleisch	0,4	0,4	0,5	0,7	0,8	0,7	0,7	0,7
Sonstiges Fleisch	2,2	2,8	3,1	2,1	2,0	1,5	1,4	1,4
Fleisch insgesamt	26,2	55,8	66,1	61,8	61,0	59,7	60,7	60,7

Quelle: Deutscher Fleischverband

- a) Seit 2000 stagniert die Einwohnerzahl der BRD bei 82,5 Millionen. Wie viel Kilogramm Rind- und Kalbfleisch wurden in Deutschland im Zeitraum von 2002 bis 2004 im Durchschnitt pro Kopf jährlich verbraucht?

- b) Um wie viel Prozent ist in Deutschland im Zeitraum von 1950 bis 2004 der jährliche Fleischkonsum pro Kopf insgesamt gestiegen?
- c) Um wie viel Prozent ist in Deutschland im Zeitraum von 1950 bis 2004 der jährliche Fleischkonsum pro Kopf im Durchschnitt pro Jahr gestiegen?
- d) Bei welcher Fleischsorte gab es in Deutschland im Zeitraum von 1950 bis 2004 die stärksten Schwankungen im Verbrauch? Bei Rind- und Kalbfleisch oder bei Schweinefleisch oder bei Geflügelfleisch oder bei Schaffleisch? (Begründung)

### Aufgabe 3

Volkswirte gehen davon aus, dass die Entwicklung des privaten Verbrauchs die Investitionstätigkeit der Unternehmen direkt beeinflusst. Wie stark der Einfluss des privaten Verbrauchs auf die Investitionstätigkeit tatsächlich ist, soll mit Hilfe der durchschnittlichen Wachstumsraten beider Größen im Zeitraum von 1999 bis 2003 für die G7-Länder ermittelt werden. Für die G7-Staaten liegen folgende Wachstumsraten in % vor:

Staat	Wachstumsrate des privaten Verbrauchs in %	Wachstumsrate der Investitionen in %
Deutschland	1,2	0,9
Frankreich	2,4	4,0
Großbritannien	3,6	5,6
Italien	2,1	2,7
Japan	0,8	2,8
Kanada	3,5	5,7
USA	3,9	4,7

Quelle: Bofinger, P.(2005): Wir sind besser, als wir glauben, München, S. 82

- a) Berechnen Sie eine geeignete statistische Kennzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen der Wachstumsrate des privaten Verbrauchs und der Wachstumsrate der Investitionen, und beurteilen Sie die Stärke des Zusammenhangs. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
- b) Im Januar 2007 wird in Deutschland die Mehrwertsteuer um drei Prozentpunkte erhöht. Angenommen hierdurch sinke die Wachstumsrate des privaten Verbrauchs in Deutschland auf 0,7 %. Mit welcher Wachstumsrate der Investition kann dann in Deutschland gerechnet werden?
- c) Für wie verlässlich halten Sie Ihr Ergebnis aus b)? Begründen Sie Ihre Aussage.

### Aufgabe 4

Nach Erhalt des Katalogs geben 61 % aller Versandhauskunden auch eine Bestellung auf.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn Kunden mehr als sechs Kunden eine Bestellung aufgeben?

- b) Wie groß ist annähernd die Wahrscheinlichkeit, dass von einhundert Kunden mehr als sechzig Kunden eine Bestellung aufgeben?
- c) Wie groß ist annähernd die Wahrscheinlichkeit, dass von tausend Kunden mehr als sechshundert Kunden eine Bestellung aufgeben?
- d) Die Wahrscheinlichkeiten unter a), b) und c) werden immer größer. Geben Sie dazu eine Begründung an.

### Aufgabe 5

Ein mittelständiges Unternehmen ist in eine wirtschaftlich schwierige Lage geraten. Aus der Analyse eines Unternehmensberaters zum Ende des Jahres 2005 ergibt sich:

- Das Unternehmen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % im Jahr 2006 insolvent.
- Falls das Unternehmen im Jahr 2006 nicht insolvent wird, so tritt die Insolvenz im Jahr 2007 mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % ein.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt im Zeitraum vom 1.1.2006 bis 31.12.2007 die Insolvenz ein?

### Lösungen

#### Lösung zu Aufgabe 1

- a) 1. diskret, metrisch skaliert  
2. Modus = häufigster Wert = 3 und Median = 50 %-Punkt = 2

$$b) \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(X = x) & 0,3 & 0,4 & 0,25 & 0,05 \end{array}$$

$$E[X] = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,05 = 1,05$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= (0 - 1,05)^2 \cdot 0,3 + (1 - 1,05)^2 \cdot 0,4 \\ &\quad + (2 - 1,05)^2 \cdot 0,25 + (3 - 1,05)^2 \cdot 0,05 \\ &= 0,7475 \end{aligned}$$

#### Lösung zu Aufgabe 2

- a) harmonisches Mittel:

$$\bar{x}_H = \frac{8,2 \cdot 82,5 + 8,6 \cdot 82,5 + 8,7 \cdot 82,5}{82,5 + 82,5 + 82,5} = 8,5$$

d.h. in Deutschland wurden im Zeitraum von 2002 bis 2004 durchschnittlich 8,5 kg Rind- und Kalbfleisch jährlich pro Kopf verzehrt.

$$b) \frac{60,7}{26,2} = 2,316794$$

d.h. in Deutschland ist im Zeitraum von 1950 bis 2004 der jährliche Fleischkonsum pro Kopf insgesamt um 131,7 % gestiegen. Er hat sich also mehr als verdoppelt.

c)  $\sqrt[54]{2,316794} = 1,015681$

d.h. in Deutschland ist im Zeitraum von 1950 bis 2004 der jährliche Fleischkonsum pro Kopf durchschnittlich um 1,6 % pro Jahr gestiegen.

d) Spannweiten:

Rind- und Kalbfleisch:	15,3 – 8,2	=	7,1
Schweinefleisch:	41,8 – 13,9	=	27,9
Geflügelfleisch:	10,6 – 0,7	=	9,9
Schaffleisch:	0,8 – 0,4	=	0,4

d.h. gemessen mit der Spannweite gab es die größten Schwankungen im Verbrauch beim Schweinefleisch.

*Lösung zu Aufgabe 3*

X = Wachstumsrate des privaten Verbrauchs (in %)

Y = Wachstumsrate der Investitionen (in %)

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
	1,2	0,9			
	2,4	4,0			
	3,6	5,6			
	2,1	2,7			
	0,8	2,8			
	3,5	5,7			
	3,9	4,7			
$\Sigma$	17,5	26,4	77,03	52,67	117,88

a) Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{7 \cdot 77,03 - 17,5 \cdot 26,4}{\sqrt{7 \cdot 52,67 - 17,5^2} \cdot \sqrt{7 \cdot 117,88 - 26,4^2}} = \frac{77,21}{\sqrt{62,44} \cdot \sqrt{128,2}} = 0,86$$

d.h. es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang vor.

b)  $b_1 = \frac{77,21}{62,44} = 1,2365$

$$a_1 = \frac{26,4 - 1,2365 \cdot 17,5}{7} = 0,6801$$

$$0,6801 + 1,2365 \cdot 0,7 = 1,6$$

d.h. es kann mit einer Wachstumsrate von 1,6 % gerechnet werden.

c) 1.  $r = 0,86$ ; d.h. Verlass

2.  $0,7 \notin [0,8; 3,9]$ ; d.h. Extrapolation; d.h. kein Verlass

3. Nur bei Deutschland ist die Wachstumsrate der Investition kleiner als die des privaten Verbrauchs, bei den übrigen G7-Staaten ist sie jeweils größer. Deshalb sollte der Wert für Deutschland mit dieser Regression nicht bestimmt werden.

*Lösung zu Aufgabe 4*

X = Anzahl der Kunden, die eine Bestellung aufgeben

$X \sim B(n; p = 0,61)$

a)  $n = 10$

$$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0,61^7 \cdot 0,39^3 = 0,2237$$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,61^8 \cdot 0,39^2 = 0,1312$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,61^9 \cdot 0,39^1 = 0,0456$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0,61^{10} \cdot 0,39^0 = 0,0071$$

$$P(X > 6) = 0,4077$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 41 %.

b)  $n = 100$

$$E[X] = np = 100 \cdot 0,61 = 61$$

$$Var[X] = np(1 - p) = 61 \cdot 0,39 = 23,79$$

$$\sqrt{23,79} = 4,88$$

Faustregel für ZGWS:

$$np = 61 \geq 10 \text{ ok. und } n(1 - p) = 100 \cdot 0,39 = 39 \geq 10 \text{ ok.}$$

$$\text{ZGWS } X \approx N(\mu = 61; \sigma = 4,88)$$

$$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) \approx 1 - F\left(\frac{60 + 0,5 - 61}{4,88}\right) = 1 - 0,459 = 0,541$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt annähernd 54 %.

c)  $n = 1\,000$

$$E[X] = np = 1\,000 \cdot 0,61 = 610$$

$$Var[X] = np(1 - p) = 610 \cdot 0,39 = 237,9$$

$$\sqrt{237,9} = 15,42$$

Faustregel für ZGWS:

$$np = 610 \geq 10 \text{ ok. und } n(1 - p) = 1\,000 \cdot 0,39 = 390 \geq 10 \text{ ok.}$$

$$\text{ZGWS } X \approx N(\mu = 610; \sigma = 15,42)$$

$$P(X > 600) = 1 - P(X \leq 600) \approx 1 - F\left(\frac{600 + 0,5 - 610}{15,42}\right) = 1 - 0,269 = 0,731$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt annähernd 73 %.

d) Das ist das schwache Gesetz der Großen Zahlen.

*Lösung zu Aufgabe 5*

A=Insolvenz tritt ein im Zeitraum vom 1.1.06 bis 31.12.06

B=Insolvenz tritt ein im Zeitraum vom 1.1.07 bis 31.12.07

$$0 = P(A \cap B)$$

$$0,40 = P(A)$$

$$0,35 = P(B | \bar{A})$$

Gesucht:  $P(A \cup B) = ?$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,35 \cdot 0,6 = 0,21$$

Arbeitstabelle:

	$A$	$\bar{A}$	
$B$	0	0,21	0,21
$\bar{B}$	0,40	0,39	0,79
	0,4	0,6	1

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,21 - 0 = 0,61$   
 d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 61 %.