

Statistik-Klausur vom 05.07.2012

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

In der folgenden Tabelle sind die Quartalsumsätze einer Firma dargestellt. Die Daten sind bereits um evtl. vorhandene saisonale Effekte bereinigt.

Quartal	Umsatz (TEUR)
3.Q 2010	276
4.Q 2010	255
1.Q 2011	307
2.Q 2011	293
3.Q 2011	278
4.Q 2011	325
1.Q 2012	346
2.Q 2012	331

- Berechnen Sie die Parameter der Regressionsgeraden.
- Welcher Umsatz ist im 4. Quartal 2012 zu erwarten?
- Welchen Umsatz prognostizieren Sie für das Jahr 2012 insgesamt?
- Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß der Daten.

Aufgabe 2

Ein Maschinenbauunternehmen stellt zwanzig Maschinen pro Monat her. Nach Abschluss der Produktion wird jede Maschine einer Qualitätskontrolle unterzogen. Aus Erfahrung weiß das Unternehmen, dass bei etwa 15% der Maschinen eine Mängelbeseitigung erfolgen muss. Die Feststellung und das Vorliegen eines Mangels bei einer Maschine sind stochastisch unabhängig von der Feststellung und dem Vorliegen eines Mangels bei einer anderen Maschine.

Pro fehlerfrei gefertigter Maschine erwirtschaftet das Unternehmen einen Gewinn von 80 000 EUR. Für Maschinen, bei denen eine Mängelbehebung vorgenommen werden muss, reduziert sich der Gewinn auf 75 000 EUR.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat bei genau neun Maschinen eine Mängelbehebung erfolgen muss?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat bei weniger als einer Maschine eine Mängelbeseitigung erfolgen muss?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat mindestens neunzehn Maschinen fehlerfrei produziert werden?
- Welchen Gewinn kann das Unternehmen pro Monat erwarten?

- e) Bei höchstens wie vielen Maschinen ist mit der Notwendigkeit einer Mängelbehebung pro Jahr mit der Wahrscheinlichkeit von 90% bei einer Jahresproduktion von 240 Maschinen zu rechnen?

Aufgabe 3

- a) Bei einer Sicherheitskontrolle am Flughafen I wird etwa bei jedem fünfzigsten Handgepäckstück Alarm ausgelöst, dass sich ein verbotener Gegenstand in diesem Gepäckstück befindet. Bei jedem zwanzigsten Gepäckstück, bei dem Alarm ausgelöst wurde, stellt sich anschließend heraus, dass es einwandfrei ist. In etwa jedem zweitausendfünfhundertsten Gepäckstück befindet sich ein verbotener Gegenstand, aber es passiert ohne Alarm die Sicherheitskontrolle.
1. Sind die Ereignisse „zufällig ausgewähltes Gepäcksstück ist einwandfrei“ und „bei zufällig ausgewähltem Gepäckstück löst die Sicherheitskontrolle einen Alarm aus“ stochastisch unabhängig?
 2. Wie viel Prozent der Gepäckstücke mit verbotenen Gegenständen bleiben bei der Sicherheitskontrolle unentdeckt?
- b) Bei einer Sicherheitskontrolle am Flughafen II wird etwa bei jedem fünfzigsten Handgepäckstück Alarm ausgelöst, dass sich ein verbotener Gegenstand in diesem Gepäckstück befindet. Bei den Gepäckstücken, die einwandfrei sind, wird etwa bei jedem hundertsten Gepäckstück trotzdem ein Alarm ausgelöst. Bei den Gepäckstücken, die verbotene Gegenstände enthalten, passiert etwa jedes fünfundzwanzigste Gepäckstück ohne Alarm die Sicherheitskontrollen. Bei einem Gepäckstück wurde Alarm ausgelöst. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es tatsächlich verbotene Gegenstände enthält?

Lösung zu Aufgabe 1

$X =$ Zeitpunkt 1,2,3, ... 8

$Y =$ Umsatz (in TEUR) pro Quartal

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	276			
2	255			
3	307			
4	293			
5	278			
6	325			
7	346			
8	331			
36	2 411	11 289	204	733 485

$$a) b_1 = \frac{8 \cdot 11\,289 - 36 \cdot 2\,411}{8 \cdot 204 - 36^2} = \frac{3\,516}{336} = 10,46429$$

$$a_1 = \frac{2\,411 - 10,46429 \cdot 36}{8} = 254,328571$$

$$b) a_1 + b_1 \cdot 10 = 359$$

d.h. im 4. Quartal 2012 ist mit einem Umsatz von 359 TEUR zu rechnen.

- c) $a_1 + b_1 \cdot 9 = 348$
 $346 + 331 + 359 + 348 = 1384$
d.h. im Jahr 2012 ist mit einem Gesamt-Umsatz von 1384 TEUR zu rechnen.

d) $b_2 = \frac{3516}{8 \cdot 733485 - 2411^2} = \frac{3516}{54959} = 0,06397496$

$$B = 10,46429 \cdot 0,06397496 = 0,6694523 \Leftrightarrow r = \sqrt{0,6694523} = 0,8182006$$

Lösung zu Aufgabe 2:

X = Anzahl der Maschinen (pro Monat bzw. pro Jahr) aus der Gesamtproduktion, bei denen eine Mängelbeseitigung erfolgen muss

$$X \sim \text{BV}(n; p = 0,15)$$

- a) $n = 20$

$$P(X = 9) = \binom{20}{9} \cdot 0,15^9 \cdot 0,85^{11} = 0,001080526$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,1%.

- b) $n = 20$

$$P(X < 1) = P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^{20} = 0,03875953$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 3,9%.

- c) $n = 20$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,03875953 + \binom{20}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{19} = 0,03875953 + 0,1367983 = 0,1755579$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 17,6%.

- d) $n = 20$

$$E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0,15 = 3$$

d.h. pro Monat ist mit drei fehlerhaften Maschinen zu rechnen.

Y = Gewinn (in Euro pro Monat)

$$Y = 75000 \cdot x + 80000 \cdot (n - x)$$

$$E[Y] = 75000 \cdot 3 + 80000 \cdot 17 = 1585000$$

d.h. pro Monat kann das Unternehmen mit einem Gewinn von 1585000 EUR rechnen.

- e) $n = 240$

$$\text{Faustregel: } n \cdot p = 240 \cdot 0,15 = 36 \geq 10 \text{ und } n \cdot (1 - p) = 240 \cdot 0,85 = 204 \geq 10$$

d.h. die Faustregel für die NV-Approximation ist erfüllt.

$$0,9 = P(X \leq x) = F_U \left(\frac{x + 0,5 - 36}{\sqrt{36 \cdot 0,85}} \right)$$

$$1,2816 = \frac{x + 0,5 - 36}{\sqrt{36 \cdot 0,85}} \Leftrightarrow x = 42,58946 \approx 43$$

d.h. pro Jahr ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% bei höchstens etwa 43 Maschinen mit der Notwendigkeit einer Mängelbehebung zu rechnen.

Lösung zu Aufgabe 3:

A = „bei zufällig ausgewähltem Gepäckstück wird Alarm ausgelöst“

E = „zufällig ausgewähltes Gepäckstück ist einwandfrei“

a) $0,02 = P(A)$

$$0,05 = P(E | A) \Rightarrow P(A \cap E) = 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$$

$$0,0004 = P(\bar{A} \cap \bar{E})$$

Arbeitstabelle:

	A	\bar{A}	
E	0,001	0,9796	0,9806
\bar{E}	0,019	0,0004	0,0194
	0,02	0,98	1

1. $P(E | A) = 0,05 \neq 0,9806 = P(E)$

d.h. die Ereignisse A, E sind stochastisch abhängig voneinander.

2. $P(\bar{A} | \bar{E}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0,0004}{0,0194} = 0,0206$

d.h. etwa zwei Prozent der Gepäckstücke mit verbotenen Gegenständen bleiben bei der Sicherheitskontrolle unentdeckt.

b) $0,02 = P(A)$

$$0,01 = P(A | E)$$

$$0,04 = P(\bar{A} | \bar{E}) \Rightarrow P(A | \bar{E}) = 1 - 0,04 = 0,96$$

$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \bar{E}) = P(A | E) \cdot P(E) + P(A | \bar{E}) \cdot (1 - P(E))$$

$$\Leftrightarrow 0,02 = 0,01 \cdot P(E) + 0,96 \cdot (1 - P(E))$$

$$\Leftrightarrow 0,02 = 0,01 \cdot P(E) + 0,96 - 0,96 \cdot P(E) = 0,96 - 0,95 \cdot P(E)$$

$$\Leftrightarrow P(E) = \frac{0,94}{0,95} = 0,9894737$$

$$\Rightarrow P(A \cap E) = 0,01 \cdot 0,9894737 = 0,0099$$

Arbeitstabelle:

	A	\bar{A}	
E	0,0099	0,9796	0,9895
\bar{E}	0,0101	0,0004	0,0105
	0,02	0,98	1

$$P(\bar{E} | A) = \frac{0,0101}{0,02} = 0,505$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 50,5%.