Statistik-Klausur vom 05.10.2011

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

a) Bei 50 Unternehmen wurde die jeweils gezahlte durchschnittliche Tantieme pro Mitarbeiter erhoben und in der folgenden Tabelle erfasst:

Klasse Nr.	Durchschnittliche Tantieme pro Arbeitnehmer (in EUR)	Anzahl Unternehmen
1	0 bis 2 000	15
2	über 2 000 bis 5 000	20
3	über 5 000 bis 10 000	10
4	über 10 000	5
Summe		50

1. Welche durchschnittliche Tantiemenhöhe pro Mitarbeiter wird von 48 Prozent der Unternehmen nicht überschritten?
2. Wie viel Prozent der Unternehmen gewähren eine durchschnittliche Tantieme pro Mitarbeiter von mehr als 8 000 EUR?

b) Da ein Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Tantieme pro Mitarbeiter und der Größe des Unternehmens basierend auf der Anzahl der jeweiligen Mitarbeiter vermutet wird, wurden für sechs der 50 Unternehmen die konkreten Einzelwerte der durchschnittlichen Tantieme und der Anzahl der Arbeitnehmer erhoben und ebenfalls erfasst (siehe folgende Tabelle):

Unternehmen	Durchschnittliche Tantieme pro Mitarbeiter (in EUR)	Anzahl Arbeitnehmer
A	1 500	20
B	2 200	18
C	4 800	45
D	6 200	70
E	8 800	63
F	10 400	108

1. Ermitteln Sie eine geeignete statistische Maßzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen der durchschnittlichen Tantieme pro Mitarbeiter und der Anzahl der Mitarbeiter. Beurteilen Sie die Stärke des Zusammenhangs.
2. Berechnen Sie die Kovarianz für die Variablen „durchschnittliche Tantieme (in EUR)“ und „Arbeitnehmer (Anzahl)“. Erläutern Sie die Aussage der Kovarianz.

Aufgabe 2
Ein Unternehmen geht bei der Durchführung eines Bauprojekts davon aus, dass sich bei Baubeginn die tatsächlich entstehenden Kosten nicht exakt kalkulieren lassen. Daher befragt das Unternehmen mehrere Experten nach ihrer Einschätzung. Daraus ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die tatsächlich enstehenden Baukosten in Geldeinheiten (GE):

Baukosten	100 GE	105 GE	110 GE	115 GE	120 GE
Wahrscheinlichkeit	2%	28%	65%	3%	2%

Das Unternehmen möchte zur Absicherung der Baukosten und dem damit verbundenen Risiko eine Rücklage bilden.

a) Wie hoch muss die Rücklage sein, wenn sie in Höhe der erwarteten Baukosten gebildet wird? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Rücklage dann ausreichend bemessen?

b) Die Rücklage soll wie folgt gebildet werden:
„Rücklage = erwartete Baukosten + Streuung gemessen in der Standardabweichung".
Wie hoch muss die Rücklage sein?

c) Wie hoch muss die Rücklage mindestens sein, wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ausreichend bemessen sein soll?

d) Wie hoch muss die Rücklage sein, wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ausreichend bemessen sein soll?

e) Die Rücklage soll in Höhe der erwarteten Kosten der 5% Kosten-intensivsten Fälle gebildet werden. Wie hoch muss dann die Rücklage sein?

Aufgabe 3
In einem Land wird im Mittel eine von fünf Steuererklärungen falsch abgegeben. Ob eine Steuererklärung richtig ist, geschieht stochstastisch unabhängig von der Richtigkeit einer anderen Steuererklärung. Pro nicht korrekt ausgefüllter Steuererklärung fallen der Finanzbehörde zwei Geldeinheiten an Zusatzkosten an.

a) Mit welchen Zusatzkosten ist bei der Überprüfung von 500 Steuererklärungen zu rechnen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter zwanzig geprüften Steuererklärungen genau vier falsch ausgefüllte Erklärungen befinden?

c) Mit wie hohen Zusatzkosten ist bei einer Überprüfung von 10 000 Steuerklärungen mit der Wahrscheinlichkeit von 95% höchstens zu rechnen?

Lösung zu Aufgabe 1:

a)

j	$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	b_j	$\frac{n_j}{n}$	$F\left(x_j^*\right)$
1	$0 < x \leq 2\,000$	2 000	0,30	0,30
2	$2\,000 < x \leq 5\,000$	3 000	0,40	0,70
3	$5\,000 < x \leq 10\,000$	5 000	0,20	0,90
4	$10\,000 < x$	–	0,10	1,00

1. $x_{0{,}48} \approx 2\,000 + \dfrac{0{,}48 - 0{,}30}{0{,}40} \cdot 3\,000 = 3\,350$
   d.h. etwa 48% der Unternehmen zahlen eine durchschnittliche Tantieme pro Mitarbeiter von höchstens 3 350 €.
2. $F(8\,000) \approx 0{,}70 + \dfrac{0{,}20}{5\,000} \cdot (8\,000 - 5\,000) = 0{,}82$
   $100\% - 82\% = 18\%$
   d.h. etwa 18% der Unternehmen geben durchschnittlich mindestens 8 000 € Tantieme pro Mitarbeiter aus.

b) X = durchschnittliche Tantieme (in 100 Euro) pro Mitarbeiter
Y = Anzahl der Arbeitnehmer eines Unternehmens

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	15	20			
2	22	18			
3	48	45			
4	62	70			
5	88	63			
6	104	108			
$\sum$	339	324	23 972	25 417	23 282

1. $b_1 = \dfrac{6 \cdot 23\,972 - 339 \cdot 324}{6 \cdot 25\,417 - 339^2} = \dfrac{33\,996}{37\,581} = 0{,}904606$
   $b_2 = \dfrac{33\,996}{6 \cdot 23\,282 - 324^2} = \dfrac{33\,996}{34\,716} = 0{,}9792603$
   $B = 0{,}904606 \cdot 0{,}9792603 = 0{,}8858448 \Leftrightarrow r = \sqrt{0{,}8858448} = 0{,}9411933$
   d.h. es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen der Höhe der Durchschnitts-Tantieme und der Anzahl der Mitarbeiter eines Unternehmens vor.
2. *1. Lösungsweg:*
   $s_{xy} = \dfrac{33\,996}{6^2} = 944{,}3333$
   2. Lösungsweg:
   $s_{xy} = \dfrac{1}{6} \cdot 23\,972 - \dfrac{339}{6} \cdot \dfrac{324}{6} = 944{,}3333$
   d.h. die Kovarianz beträgt $944{,}33 \cdot 100 = 94\,433$ €. Die Kovarinaz misst die Richtung (nicht die Stärke) eines ggf. bestehenden linearen Zusammenhangs.

Lösung zu Aufgabe 2:
X = Baukosten (in GE)

a) $E[X] = 0{,}02 \cdot 100 + 0{,}28 \cdot 105 + 0{,}65 \cdot 110 + 0{,}3 \cdot 115 + 0{,}02 \cdot 120 = 108{,}75$
d.h. die Rücklage in Höhe der erwarteten Baukosten beträgt 108,75 GE.
$P(X \leq 108{,}75) = P(X \leq 105) = 0{,}30$
d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Baukosten nicht höher sind als die erwartete Rücklage, beträgt 30%.

b) $V[X] = (100 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}02 + (105 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}28 + (110 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}65 + (115 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}03 + (120 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}02 = 10{,}1875$
$\sqrt{V[X]} = \sqrt{10{,}1875} = 3{,}191786$
$E[X] + \sqrt{V[X]} = 108{,}75 + 3{,}191786 = 111{,}9418$
d.h. die Rücklage muss 111,94 GE betragen.

c) $P(X \leq x) \geq 0{,}80 \Leftrightarrow x = 110$
d.h. die Rücklage muss mindestens 110 GE hoch sein, um mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% ausreichend bemessen zu sein.

d) $P(X \leq x) = 0{,}95 \Leftrightarrow x = 110$
d.h. wenn die Rücklage 110 GE beträgt, so liegen die tatsächlich anfallenden Baukosten mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht über diesen Wert.

e) $115 \cdot \dfrac{0{,}03}{0{,}05} + 120 \cdot \dfrac{0{,}02}{0{,}05} = 117$
d.h. die erwarteten Baukosten der 5%-Kosten-intensivsten Fälle beträgt 117 €.

Lösung zu Aufgabe 3:
X= Anzahl der falschen Steuererklärungen unter n geprüften
$X \sim \mathsf{BV}(n; p = 0{,}2)$

a) $n = 500$
$E[X] = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}2 = 100$
$100 \cdot 2 = 200$
d.h. es ist mit Zusatzkosten in Höhe von 200 Euro zu rechnen.

b) $n = 20$
$P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} = 0{,}2181994$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 22%.

c) $n = 10\,000$
$E[X] = n \cdot p = 2\,000$ und $V[X] = np(1-p) = 1\,600$
Faustregel: $n \cdot p = 2\,000 > 10$ und $n \cdot (1-p) = 8\,000 > 10$ ist erfüllt
$0{,}95 = P(X \leq x) = F_U\left(\dfrac{x + 0{,}5 - 2\,000}{40}\right) \Leftrightarrow 1{,}6449 = \dfrac{x + 0{,}5 - 2\,000}{40} \Leftrightarrow x = 2\,065{,}296$
$2\,065{,}296 \cdot 2 = 4\,130{,}592$
d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von 95% liegen die Zusatzkosten nicht über 4 130,59 Euro.