Statistik-Klausur vom 6. Februar 2007

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1
Bei einer Besucherumfrage in zwei Museen wurden die Besuchsdauern (gemessen in Stunden) festgestellt:

Besuchsdauer in Stunden	Anteil der Besucher in Museum 1	Museum 2
über 0 bis unter einer Stunde	20%	15%
eine bis unter 2,5 Stunden	70%	80%
2,5 bis unter 5 Stunden	10%	5%

a) In welchem der beiden Museen halten sich die Besucher im Durchschnitt länger auf?

b) In welchem der beiden Museen schwanken die Besuchsdauern stärker?

c) Wie hoch ist in Museum 1 der Anteil der Besucher, die sich mindestens zwei Stunden im Museum aufhalten?

d) Wie viele Stunden verbringen 70 % der Besucher von Museum 2 mindestens im Museum 2?

Aufgabe 2
Es wird vermutet, dass die Exporte eines Landes unter anderem von der Entfernung zum Importland abhängen. Um den möglichen Zusammenhang zwischen Exporten und geographischer Entfernung bestimmen zu können, wurden zum einen die Exporte von Deutschland in fünf Länder für das Jahr 2005 erfasst und zum anderen die geographischen Distanzen zwischen Deutschland und den Importländern ermittelt. (Die geographische Distanz ist die Entfernung zwischen ökonomisch wichtigen Städten.) Die Daten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Exporte von Deutschland nach …	Exporte in Mrd. US-Dollar	Geographische Distanz zwischen Deutschland und dem Importland in 1 000 Kilometern
Frankreich	99,4	0,4
Italien	67,7	1,1
USA	86,1	6,4
Australien	6,3	16,6
Japan	16,6	9,4

a) Berechnen Sie eine geeignete statistische Maßzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen den deutschen Exporten und der geographischen Distanz. Beurteilen Sie die Stärke des Zusammenhangs. (*Hinweis: Runden Sie ggf. Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.*)

b) Die geographische Distanz zwischen Deutschland und den Niederlanden beträgt 235 Kilometer. Wie hoch dürften dann die Exporte von Deutschland in die Niederlande sein?

c) Für wie verlässlich halten Sie Ihre Prognose unter b)? Begründung!

Aufgabe 3

Eine Unternehmung führt für ihr Produkt A eine Kundenanalyse durch. Dabei interessiert u.a., wie hoch der Anteil der „treuen" Kunden ist, d.h. derjenigen Kunden, die das Produkt A seit mindestens zehn Jahren kaufen.

a) Es soll ein 0,95-Konfidenzintervall für den Anteil der treuen Kunden berechnet werden. Wie viele Kunden sind zu befragen, damit der Anteil der treuen Kunden in der Stichprobe höchstens um drei Prozentpunkte vom Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit abweicht?

b) Insgesamt wurden 1 246 Kunden befragt, seit wie vielen Jahren sie schon das Produkt A kaufen:

Jahre	Anzahl der Kunden
noch kein Jahr	641
1 bis unter 5 Jahre	367
5 bis unter 10 Jahre	128
10 bis unter 12 Jahre	87
12 Jahre oder länger	23
$\sum$	1 246

Berechnen Sie anhand der Stichprobe ein 0,95-Konfidenzintervall für den Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit.

c) Interpretieren Sie das erhaltene Intervall unter b).

Aufgabe 4

Eine Unternehmung benötigt zur Produktion drei Rohstoffe R_1, R_2, R_3. In den letzten vier Perioden ergab sich der folgende Verbrauch:

Periode	R_1	R_2	R_3
1	5 ME	7 ME	2 ME
2	5 ME	8 ME	4 ME
3	4 ME	7 ME	5 ME
4	4 ME	8 ME	5 ME

ME=Mengeneinheiten

Die Rohstoffpreise (pro Mengeneinheit) in den einzelnen Perioden wurden wie folgt beobachtet:

Periode	R_1	R_2	R_3
1	3,90 GE	2,00 GE	7,30 GE
2	3,80 GE	2,20 GE	7,00 GE
3	3,70 GE	1,90 GE	6,90 GE
4	3,60 GE	2,10 GE	7,00 GE

GE=Geldeinheiten

a) Um wie viel Prozent haben sich die gesamten Rohstoffausgaben der Unternehmung zwischen der ersten und der vierten Periode nominal verändert?

b) Um wie viel Prozent haben sich die Rohstoffpreise (gemessen am Rohstoffverbrauch der Unternehmung in der ersten Periode) zwischen der ersten und der vierten Periode verändert? Beantworten Sie die Frage durch Berechnung eines geeigneten Preisindex.

c) Um wie viel Prozent haben sich die Rohstoffpreise (gemessen am Rohstoffverbrauch der Unternehmung in der vierten Periode) zwischen der ersten und vierten Periode verändert? Beantworten Sie die Frage durch Berechnung eines geeigneten Preisindex.

d) Um wie viel Prozent hat sich der Rohstoffverbrauch (gemessen an den Preisen der vierten Periode) der Unternehmung zwischen der ersten und vierten Periode verändert? Verwenden Sie zur Berechnung den Zusammenhang zwischen Preis-, Mengen- und Wertindizes.

Aufgabe 5

Die Funktionsdauer (gemessen in Stunden) einer Taschenlampe mit einem Satz Batterien sei normalverteilt.

a) Der Erwartungswert der Funktionsdauer (gemessen in Stunden) einer Taschenlampe vom Typ X beträgt 240 Stunden und die Standardabweichung beträgt 20 Stunden.

   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Funktionsdauer einer solchen Taschenlampe mehr als 250 Stunden beträgt?
   2. Welche Funktionsdauer einer solchen Taschenlampe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,5% nicht überschritten?
   3. Bestimmen Sie die Ober- und die Untergrenze des zweifachen zentralen Schwankungsintervalls $[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma]$.
   4. Berechnen Sie das zentrale Schwankungsintervall $[\mu - c \cdot \sigma; \mu + c \cdot \sigma]$, innerhalb dessen die Funktionsdauer einer solchen Taschenlampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt.

b) Der Erwartungswert der Funktionsdauer (gemessen in Stunden) einer Taschenlampe vom Typ Y beträgt 200 Stunden. Ferner ist bekannt, dass 2,5 % dieser Taschenlampen eine Funktionsdauer von höchstens 180,4 Stunden besitzen.

Bestimmen Sie die theoretische Standardabweichung der Funktionsdauer einer solchen Taschenlampe vom Typ Y.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
X=Besuchsdauer in Museum 1
Y=Besuchsdauer in Museum 2

Besuchsdauer	Klassenmitte	Museum 1		Museum 2	
		n_j/n	F_X	n_j/n	F_Y
0 - 1	0,5	0,20	0,20	0,15	0,15
1 - 2,5	1,75	0,70	0,90	0,80	0,95
2,5 - 5	3,75	0,10	1,00	0,05	1,00

a) arithmetisches Mittel:
$\overline{x} = 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 1{,}75 \cdot 0{,}7 + 3{,}75 \cdot 0{,}10 = 1{,}7$
$\overline{y} = 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 1{,}75 \cdot 0{,}8 + 3{,}75 \cdot 0{,}05 = 1{,}6625$
d.h im Museum 1 halten sich die Besucher etwas länger auf.

b) empirische Varianz:
$s_x^2 = (0{,}5 - 1{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (1{,}75 - 1{,}7)^2 \cdot 0{,}7 + (3{,}75 - 1{,}7)^2 \cdot 0{,}10 = 0{,}71$
$s_y^2 = (0{,}5 - 1{,}6625)^2 \cdot 0{,}15 + (1{,}75 - 1{,}6625)^2 \cdot 0{,}8 + (3{,}75 - 1{,}6625)^2 \cdot 0{,}05 = 0{,}43$
d.h. die Besuchsdauern schwanken im Museum 1 stärker.

c) Anteilswert:
$F_X(2) = F(1) + \frac{0{,}7}{1{,}5}(2 - 1) = 0{,}667$
d.h. 33,3% aller Besucher von Museum 1 halten sich mindestens zwei Stunden im Museum auf.

d) Prozentpunkt:
$$y_{0{,}30} = 1 + \frac{0{,}30 - 0{,}15}{0{,}80} \cdot 1{,}5 = 1{,}2813$$
d.h. 70% aller Besucher von Museum 2 halten sich mindestens 1,3 Stunden im Museum 2 auf.

Lösung zu Aufgabe 2
X=Exporte
Y=Distanz

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
99,4	0,4			
67,7	1,1			
86,1	6,4			
6,3	16,6			
16,6	9,4			
276,1	33,9	925,89	22 192,11	406,25

a) Gesucht $r=?$
$b_1 = \dfrac{5 \cdot 925{,}89 - 276{,}1 \cdot 33{,}9}{5 \cdot 22\,192{,}11 - 276{,}1^2} = -\dfrac{4\,730{,}34}{34\,729{,}34} = -0{,}1362$
$b_2 = \dfrac{4\,730{,}34}{5 \cdot 406{,}25 - 33{,}9^2} = -\dfrac{4\,730{,}34}{882{,}04} = -5{,}3630$
$r = -\sqrt{b_1 \cdot b_2} = -\sqrt{0{,}7304} = -0{,}8547$
d.h. es besteht ein starker negativer linearer Zusammenhang zwischen den Exporten und der geographischen Distanz.

b) $y = 0{,}235$
Gesucht: $g(0{,}235) = a_2 + b_2 \cdot 0{,}235 =?$
$a_2 = \dfrac{276{,}1 - (-5{,}3630) \cdot 33{,}9}{5} = \dfrac{457{,}9057}{5} = 91{,}5811$
$g(0{,}235) = 91{,}5811 - 5{,}3630 \cdot 0{,}235 = 90{,}3208$
d.h. die Exporte dürften bei 90,3 Mrd. Dollar liegen.

c) Die Korrelation ist stark, jedoch handelt es sich bei der Berechnung unter b) um eine Extrapolation. Auf die Ergebnisse einer Extrapolation ist wenig Verlass.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Mindeststichprobenumfang:
$n \geq \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{0{,}03^2} = 1\,067{,}1$
d.h. es sind mindestens 1 068 Kunden zu befragen.

b) $p=$ Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit
$\widehat{p} =$ Anteil der treuen Kunden in der Stichprobe $= \frac{87+23}{1\,246} = 0{,}0883$
Faustregel $n = 1\,246 \geq 100$ ist erfüllt
0,95-KI für $p=?$
$0{,}0883 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}0883 \cdot 0{,}9117}{1\,246}} = 0{,}0883 \pm 0{,}0158 = [0{,}0725; 0{,}1041]$

c) d.h. [7,3%; 10,4%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wertindex:
$W_{14} = \dfrac{4 \cdot 3{,}6 + 8 \cdot 2{,}1 + 5 \cdot 7}{5 \cdot 3{,}9 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 7{,}3} = \dfrac{66{,}2}{48{,}1} = 1{,}3763$
d.h. nominal sind die Ausgaben um 37,6% gestiegen.

b) Preisindex von Laspeyres:
$P_{14}^{La} = \dfrac{5 \cdot 3{,}6 + 7 \cdot 2{,}1 + 2 \cdot 7}{48{,}1} = \dfrac{46{,}7}{48{,}1} = 0{,}9709$
d.h. die Preise sind um 2,9 % gesunken.

c) Preisindex von Paasche:
$$P_{14}^{Pa} = \frac{66{,}2}{4 \cdot 3{,}9 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 7{,}3} = \frac{66{,}2}{68{,}1} = 0{,}9721$$
d.h. die Preise sind um 2,8 % gesunken.

d) Mengenindex von Paasche:
$$Q_{14}^{Pa} = \frac{W_{14}}{P_{14}^{La}} = \frac{1{,}3763}{0{,}9709} = 1{,}4176$$
d.h. der Verbrauch ist um 41,8 % gestiegen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) X = Funktionsdauer der Taschenlampe vom Typ X
$X \sim \mathsf{N}(\mu = 240; \sigma = 20)$

1. $P(X > 250) = 1 - F_U\left(\frac{250-240}{20}\right) = 1 - F_U(0{,}5) = 0{,}309$
   d.h die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,309.
2. $0{,}975 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x-240}{20}\right)$
   $1{,}96 = \dfrac{x-240}{20} \Rightarrow x = 240 + 1{,}96 \cdot 20 = 279{,}2$
   d.h die Funktionsdauer beträgt etwa 279 Stunden.
3. $240 \pm 2 \cdot 20 = [200; 280]$
   d.h. das zweifache zentrale Schwankungsintervall beträgt [200;280].
4. $0{,}95 = P(X \leq 240 + c \cdot 20) = F_U\left(\dfrac{240 + c \cdot 20 - 240}{20}\right) = F_U(c)$
   $1{,}6449 = c$
   $240 \pm 1{,}6449 \cdot 20 = [207{,}1; 272{,}9]$
   d.h. das gesuchte Intervall beträgt etwa [207;273].

b) Y = Funktionsdauer der Taschenlampe vom Typ Y
$Y \sim \mathsf{N}(\mu = 200; \sigma)$
Wir wissen schon, dass NV vorliegt und dass der Erwartungswert $\mu = 200$ beträgt. Um mit der NV rechnen zu können, fehlt noch die Angabe der Standardabweichung σ.

1. Gesucht $\sigma = ?$
   $0{,}025 = P(Y \leq 180{,}4) = F_U\left(\frac{180{,}4-200}{\sigma}\right) = F_U\left(\frac{-19{,}6}{\sigma}\right)$
   $-1{,}96 = \dfrac{-19{,}6}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 10$
   d.h. es liegt einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert 200 und der Standardabweichung 10 vor.