Statistik-Klausur vom 06.07.2010

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1
Eine Wirtschaftsprüfungsgesellschaft hat die durchschnittlichen Stundensätze pro Mitarbeiter in Euro (EUR) bei ihren 400 Mandantenaufträgen untersucht. Die Auswertung der Rechnungen und des Stundenerfassungssystems lieferte die folgenden Werte:

Klasse Nr.	Durchschnittlicher Stundensatz über ... bis maximal ... (in EUR)	Anzahl Mandanten-aufträge
1	30 bis 60	24
2	60 bis 90	80
3	90 bis 120	96
4	120 bis 150	90
5	150 bis 180	40
6	180 bis 210	70
Summe		400

a) Welcher durchschnittliche Stundensatz wird von 25 Prozent der Mandantenaufträge nicht überschritten?

b) Bei wie viel Prozent der Mandantenaufträge kann ein durchschnittlicher Stundensatz von mehr als 171 EUR erwirtschaftet werden?

c) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel, den Median sowie den Modus und erläutern Sie die Aussage dieser drei Lageparameter.

d) Wie stark sind die Unterschiede in den Daten? Beantworten Sie diese Frage durch die Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.

Aufgabe 2
Täglich geht auf der Linie Hamburg - New York ein Nonstop-Flug. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flug verspätet ist, liegt bei 12%.

a) Nehmen Sie an, dass die Anzahl der verspäteten Flüge pro Woche auf dieser Linie binomialverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Woche

   1. alle Flüge auf dieser Linie pünktlich sind?
   2. mehr als drei Flüge auf dieser Linie verspätet sind?
   3. genau fünf Flüge auf dieser Linie pünktlich sind?

b) Nehmen Sie an, dass die Anzahl der verspäteten Flüge für die kommenden 150 Tage auf dieser Linie binomialverteilt ist.

   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der verspäteten Flüge auf dieser Linie binnen der kommenden 150 Tage

- genau achtzehn beträgt?
- höchstens achtzehn beträgt?

2. Mit wie vielen verspäteten Flügen auf dieser Linie ist binnen der kommenden 150 Tage mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens zu rechnen?

Aufgabe 3
Vor dem Verkauf testet ein Unternehmen seine Produkte auf die beiden Fehler A und B. Bei 10% der Produkte wird der Fehler A festgestellt, bei 5% Fehler B. Genau 0,5% der Produkte weisen sowohl den Fehler A als auch den Fehler B auf.

a) Wie viel Prozent der Produkte haben mindestens einen Fehler?

b) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse „ein Produkt hat den Fehler A“ und „ein Produkt hat den Fehler B“ stochastisch unabhängig sind.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable „Anzahl der Fehler bei einem Produkt“.

d) Das Unternehmen möchte den Erwartungswert in Aufgabenteil c) auf maximal 0,12 Fehler pro Produkt senken. Wie hoch darf dann der Anteil der Produkte mit Fehler A maximal sein, wenn der Anteil der Produkte mit Fehler B nach wie vor 5% beträgt und das Auftreten der beiden Fehler weiterhin als stochastisch unabhängig angenommen wird?

Lösung zu Aufgabe 1:
X = durchschnittlicher Stundensatz pro Mitarbeiter eines Mandantenauftrags (in EUR)

j	$x^*_{j-1} < x \leq x^*_j$	x'_j	b_j	n_j	n_j/n	$F(x^*_j)$
1	30 − 60	45	30	24	0,060	0,060
2	60 − 90	75	30	80	0,200	0,260
3	90 − 120	105	30	96	0,240	0,500
4	120 − 150	135	30	90	0,225	0,725
5	150 − 180	165	30	40	0,100	0,825
6	180 − 210	195	30	70	0,175	1,000
$\sum$				400	1	

a) $x_{0,25} \approx 60 + \dfrac{0{,}25 - 0{,}06}{0{,}2} \cdot 30 = 88{,}5$
d.h. etwa 25% aller Mandantenaufträge liegen mit ihren durchschnittlichne Stundenlöhnen pro Mitarbeiter nicht über 88,5 Euro.

b) $F(171) \approx 0{,}725 + \dfrac{0{,}1}{30}(171 - 150) = 0{,}795$
$100\% - 79{,}5\% = 20{,}5\%$
d.h. etwa 20,5% aller Mandantenaufträge liegen mit ihren durchschnittlichen Stundenlöhnen pro Mitarbeiter bei über 171 Euro.

c) $\overline{x} \approx \dfrac{1}{400}\left[45 \cdot 24 + 75 \cdot 80 + 105 \cdot 96 + 135 \cdot 90 + 165 \cdot 40 + 195 \cdot 70\right] = 123{,}9$
d.h. der durchschnittliche Stundenlohn pro Mitarbeiter eines Mandantenauftrags liegt bei 123,90 Euro.
$x_{0{,}50} \approx 120$
d.h. etwa 50% aller Mandantenaufträge liegen mit ihren durchschnittlichen Stundenlöhnen pro Mitarbeiter nicht über 120 Euro.
2. Lösungsweg:
$x_{0{,}50} \approx 90 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}26}{0{,}24} \cdot 30 = 120$
$x_{\text{Modus}} = 105$
d.h. die Klassenmitte derjenigen Klasse mit der größten Dichte beträgt 105 Euro. Da alle Klassen gleich breit (äquidistant) sind, ist in der Umfrage der Stundenlohn von etwa 105 Euro der am häufigsten genannte Wert.

d) *1. Lösungsweg:*

$$\begin{aligned} s_x^2 \;&\approx\; \frac{1}{400}\Big[(45-123{,}9)^2 \cdot 24 + (75-123{,}9)^2 \cdot 80 + (105-123{,}9)^2 \cdot 96 \\ &\quad +(135-123{,}9)^2 \cdot 90 + (165-123{,}9)^2 \cdot 40 + (195-123{,}9)^2 \cdot 70\Big] \\ &= \; 2\,018{,}79 \end{aligned}$$

d.h. gemessen mit der Varianz betragen die Unterschiede in den Daten 2 018,79 Euro^2.
2. Lösungsweg:
$s_x \approx \sqrt{2\,018{,}79} = 44{,}93$
d.h. gemessen mit der Standardabweichung betragen die Unterschiede in den Daten 44,93 Euro.
3. Lösungsweg:
$x_{0{,}75} - x_{0{,}25} \approx 150 + \dfrac{0{,}75 - 0{,}725}{0{,}1} \cdot 30 - 88{,}5 = 157{,}5 - 88{,}5 = 69{,}0$
d.h. die Spanne zwischen dem unteren und dem oberen Quartil beträgt 69 Euro.
4. Lösungsweg:
$\dfrac{x_{0{,}75} - x_{0{,}25}}{x_{0{,}5}} = \dfrac{69}{120} = 0{,}575$
d.h. gemessen mit dem relativen Quartilsabstand betragen die Unterschiede in den Daten 0,575.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) X=Anzahl der verspäteten Flüge von sieben Flügen
$X \sim \mathsf{BV}(n = 7; p = 0{,}12)$

1. $P(X = 0) = \dbinom{7}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^7 = 0{,}4087$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 41%.
2. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$
   $P(X = 1) = \dbinom{7}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^6 = 0{,}3901$

$P(X=2)=\binom{7}{2}\cdot 0{,}12^2\cdot 0{,}88^5=0{,}1596$
$P(X=3)=\binom{7}{3}\cdot 0{,}12^3\cdot 0{,}88^4=0{,}0363$
$P(X>3)=1-0{,}4087-0{,}3901-0{,}1596-0{,}0363=0{,}0054$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,5%.

3. $P(X=2)=0{,}1596$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 16%.

b) X=Anzahl der verspäteten Flüge von 150 Flügen
   $X\sim \mathsf{BV}(n=150;p=0{,}12)$

1. • $P(X=18)=\binom{150}{18}\cdot 0{,}12^{18}\cdot 0{,}88^{132}=0{,}0998$
     d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 10%.
     2. Lösungsweg über ZGWS:
     Faustregel $np=18\geq 10$ okay und $n(1-p)=132\geq 10$ okay
     $P(X=18)\approx F_U\left(\frac{18{,}5-18}{3{,}98}\right)-F_U\left(\frac{17{,}5-18}{3{,}98}\right)=F_U(0{,}1256)-F_U(-0{,}1256)=0{,}550-0{,}450=0{,}100$
   • $P(X\leq 18)\approx F_U\left(\frac{18{,}5-18}{3{,}98}\right)=0{,}550$ d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 55%.

2. *1. Lösungsweg:*
   $0{,}90=P(X\geq x)\Leftrightarrow 0{,}10=P(X<x)=P(X\leq x-1)$
   $0{,}10=P(X\leq x-1)=F_U\left(\frac{x-1+0{,}5-18}{3{,}98}\right)$
   $\Leftrightarrow -1{,}2816=\frac{x-1+0{,}5-18}{3{,}98}\Leftrightarrow x=18{,}5-1{,}2816\cdot 3{,}98=13{,}40\approx 13$
   d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ist mindestens mit etwa 13 verspäteten Flügen zu rechnen.
   2. Lösungsweg:
   $0{,}10=P(X\leq x)=F_U\left(\frac{x+0{,}5-18}{3{,}98}\right)$
   $\Leftrightarrow -1{,}2816=\frac{x+0{,}5-18}{3{,}98}\Leftrightarrow x=17{,}5-1{,}2816\cdot 3{,}98=12{,}40\approx 12$
   d.h. $0{,}10\approx P(X\leq 12)\Leftrightarrow 0{,}90\approx P(X>12)=P(X\geq 13)$
   d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ist mindestens mit etwa 13 verspäteten Flügen zu rechnen.

Lösung zu Aufgabe 3:
A = ein zufällig ausgewähltes Produkt weist den Fehler A auf
B = ein zufällig ausgewähltes Produkt weist den Fehler B auf
Arbeitstabelle:

	A	$\overline{A}$	
B	0,005	0,045	0,050
$\overline{B}$	0,095	0,855	0,950
	0,100	0,900	1

a) $P(A \cup B) = 1 - 0{,}855 = 0{,}145$
d.h. 14,5% aller Produkte haben mindestens einen der beiden Fehler.
2. Lösungsweg:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}100 + 0{,}050 - 0{,}005 = 0{,}145$

b) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005 = P(A \cap B)$
d.h. A, B sind stochastisch unabhängig.

c) $X=$ Anzahl der Fehler pro Produkt

Fehler	0	1	2
Wkt.	0,855	0,140	0,005

$E[X] = 0 \cdot 0{,}855 + 1 \cdot 0{,}140 + 2 \cdot 0{,}005 = 0{,}15$
(d.h. pro Produkt muss mit 0,15 Fehlern gerechnet werden.)
$V[X] = (0 - 0{,}15)^2 \cdot 0{,}855 + (1 - 0{,}15)^2 \cdot 0{,}14 + (2 - 0{,}15)^2 \cdot 0{,}005 = 0{,}1375$

d) Arbeitstabelle:

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}05a$	$(1-a) \cdot 0{,}05$	0,05
$\overline{B}$	$0{,}95a$	$0{,}95 \cdot (1-a)$	0,95
	a	$1-a$	1

$X=$ Anzahl der Fehler pro Produkt

Fehler	0	1	2
Wkt.	$0{,}95(1-a)$	$0{,}95a + 0{,}05(1-a)$	$0{,}05a$

$0{,}12 \stackrel{!}{=} E[X] = 0 \cdot 0{,}95 \cdot (1-a) + 0{,}95a + (1-a) \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot a = a + 0{,}05 \Rightarrow a = 0{,}07$
d.h. die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A darf höchstens 7% betragen.