Statistik-Klausur vom 08.02.2012

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

a) Bei 20 mittelständischen Chemieunternehmen in Europa wurde der jeweils in Mio. EUR erfasste Jahresüberschuss erhoben und in der folgenden Tabelle dargestellt:

Laufende Nummerierung	Jahresüberschuss in Mio. EUR	Anzahl Unternehmen
1	1	4
2	2	2
3	4	4
4	8	4
5	9	5
6	12	1
$\sum$		20

1. Bestimmen Sie den Median.
2. Wie viel Prozent der Unternehmen erzielen einen Jahresüberschuss von mehr als 8 Mio. EUR?

b) Da ein Zusammenhang zwischen Jahresüberschuss und dem Rohstoffeinkaufspreis vermutet wird, wurde für eines der Unternehmen für die letzten drei Jahre der erzielte Jahresüberschuss in Mio. EUR sowie der durchschnittliche Rohstoffeinkaufspreis eines Jahres in EUR pro Tonne erhoben und in der folgenden Tabelle erfasst:

Jahr	Jahresüberschuss in Mio. EUR	Rohstoffeinkaufspreis in EUR pro Tonne
2008	4	20
2009	2	30
2010	8	10

1. Ermitteln Sie eine geeignete statistische Maßzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen dem Jahresüberschuss und dem Rohstoffeinkaufspreis. Beurteilen Sie die Stärke des Zusammenhangs.
2. Im Jahr 2011 beträgt der durchschnittliche Rohstoffeinkaufspreis des Unternehmes 35 EUR pro Tonne. Mit welchem Jahresüberschuss kann das Unternehmen für das Jahr 2011 rechnen? Für wie verlässlich halten Sie die Prognose? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Das Unternehmen schätzt den Rohstoffeinkaufspreis für das Jahr 2012 auf 25 EUR pro Tonne. Mit welchem Jahresüberschuss kann das Unternehmen

für das Jahr 2012 planen? Wie beurteilen Sie diese Prognose? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2

Unternehmen „Lebensmittel" produziert und vertreibt ein Produkt A. Das Unternehmen geht nach Durchführung einer Marktforschungsstudie mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% davon aus, dass ein zufällig ausgewählter Konsument das Produkt kauft. Bei dem Produkt B eines Konkurrenten schätzt das Unternehmen die Wahrscheinlichkeit auf 60%, dass ein zufällig ausgewählter Konsument dieses Produkt B kauft. Darüber hinaus erwartet das Unternehmen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 32% ein zufällig ausgewählter Konsument sowohl Podukt A als auch Produkt B kauft.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein zufällig ausgewählter Konsument mindestens eines der beiden Produkte A und B?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt A erwerbender (zufällig ausgewählter) Konsument Produkt B kauft?

c) Sind die Ereignisse „zufällig ausgewählter Konsument kauft Produkt A" und „zufällig ausgewählter Konsument kauft Produkt B" stochastisch unabhängig?

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Konsument nur Produkt B kauft?

e) Das Unternehmen „Lebensmittel" vertreibt neben Produkt A auch das (Komplementär-) Produkt C. Das Unternehmen rechnet mit einer Wahrscheinlichkeit von 81,25%, dass ein zufällig ausgewählter Konsument Produkt C kauft. Darüber hinaus veranschlagt das Unternehmen die Wahrscheinlichkeit mit 60%, dass ein Produkt C kaufender (zufällig ausgewählter) Konsument Produkt A kauft. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt A kaufender (zufällig ausgewählter) Konsument Produkt C kauft?

Aufgabe 3

Ein Versicherungsunternehmen, das Kosten bei einem Reiserücktritt erstattet, weiß aus Erfahrung, dass etwa 12% der abgeschlossenen Verträge einen Reiserücktritt anzeigen. Nehmen Sie an, dass Reiserücktritte stochastisch unabhängig voneinander auftreten.

a) Pro Tag bestehen etwa zehn Verträge.

   1. Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Reiserücktritten pro Tag?
   2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag kein Reiserücktritt angezeigt wird?
   3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag mehr als zwei Verträge einen Reiserücktritt anzeigen?

b) Pro Jahr bestehen etwa 320 Verträge.

1. Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Reiserücktritten pro Jahr?
2. Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariable X=Anzahl der Reiserücktritte pro Jahr.
3. Über welcher Mindestanzahl liegt mit der Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der Reiserücktritte pro Jahr?

Lösung zu Aufgabe 1

a) X=Jahresüberschuss (in Mio. EUR) eines Unternehmens

x_i	n_i/n	$F(x_i)$
1	0,20	0,20
2	0,10	0,30
4	0,20	0,50
8	0,20	0,70
9	0,25	0,95
12	0,05	1,00

1. $x_{0,50} = 4$
2. $1 - F(8) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$
   d.h. die gesuchte Prozentzahl beträgt 30%.

b) X=jährlicher Unternehmens-Überschuss (in Mio. EUR)
Y=jährlicher Rohstoffeinkaufspreis (in EUR pro Tonne)

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	4	20	80	16	400
2	2	30	60	4	900
3	8	10	80	64	100
$\sum$	14	60	220	84	1 400

1. $b_1 = \dfrac{3 \cdot 220 - 14 \cdot 60}{3 \cdot 84 - 14 \cdot 14} = \dfrac{-180}{56} = -3{,}214286$
   $b_2 = \dfrac{-180}{3 \cdot 1\,400 - 60 \cdot 60} = \dfrac{-180}{600} = -0{,}3$
   $r = -\sqrt{(-3{,}214286 \cdot (-0{,}3)} = -0{,}9819805$
   d.h. es liegt ein starker negativer linearer Zusammenhang vor.
2. $a_2 + b_2 \cdot 35 = ?$
   $a_2 = \dfrac{14 - -0{,}3 \cdot 60}{3} = 10{,}\overline{6}$
   $10{,}\overline{6} - 0{,}3 \cdot 35 = 0{,}1\overline{6}$
   d.h. es ist mit einem Jahresüberschuss von etwa 0,17 Mio. EUR zu rechnen. Da es sich bei dem Wert 0,17 Mio. EUR um einen extrapolierten Wert handelt, ist diese Prognose nicht zuverlässig.
3. $a_2 + b_2 \cdot 25 = 10{,}\overline{6} - 0{,}3 \cdot 25 = 3{,}1\overline{6}$
   d.h. es ist mit einem Jahresüberschuss von etwa 3 Mio. EUR zu rechnen.

Da es sich bei dem Wert 3,17 Mio. EUR um einen interpolierten Wert handelt und gleichzeitig eine starke Korrelation vorliegt, ist diese Prognose zuverlässig.

Lösung zu Aufgabe 2
A = zufällig ausgewählter Konsument kauft Produkt A
B = zufällig ausgewählter Konsument kauft Produkt B

	A	$\overline{A}$	
B	0,32	0,28	0,60
$\overline{B}$	0,33	0,07	0,40
	0,65	0,35	1

a) $P(A \cup B) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 93%.

b) $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B}{P(A)} = \frac{0{,}32}{0{,}65} = 0{,}4923$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 49%.

c) $P(B \mid A) = 0{,}4923 \neq 0{,}60 = P(B)$
d.h. die Ereignisse A, B sind stochastisch abhängig.

d) $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}28$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 28%.

e) C = zufällig ausgewählter Konsument kauft Produkt C
$0{,}60 = P(A \mid C) \Rightarrow P(A \cap C) = P(A \mid C) \cdot P(C) = 0{,}60 \cdot 0{,}8125 = 0{,}4875$

	A	$\overline{A}$	
C	0,4875	0,3250	0,8125
$\overline{C}$	0,1625	0,0250	0,1875
	0,6500	0,3500	1

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0{,}4875}{0{,}65} = 0{,}75$$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 75%.

Lösung zu Aufgabe 3:
X = Anzahl der Reiserücktritten unter n Verträgen
$X \sim \mathsf{BV}(n; p = 0{,}12)$

a) $n = 10$

1. $E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}12 = 1{,}2$
   d.h. pro Tag ist mit 1,2 Reisrücktritten zu rechnen.
2. $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{10} = 0{,}2785$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 28%.
3. $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$
   $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^8 = 0{,}2330$

$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^9 = 0{,}3798$
$P(X > 2) = 1 - 0{,}2785 - 0{,}3798 - 0{,}2330 = 0{,}1087$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 11%.

b) $n = 320$

1. $E[X] = n \cdot p = 320 \cdot 0{,}12 = 38{,}4$
   d.h. pro Jahr ist mit 38,4 Reiserücktritten zu rechnen.
2. $V[X] = np(1-p) = 38{,}4 \cdot 0{,}88 = 33{,}792$
   $\sqrt{33{,}792} = 5{,}81$
3. Faustregel: $n \cdot p = 38{,}4 > 10$ und $n \cdot (1-p) = 281{,}6 > 10$ ist erfüllt
   $0{,}90 = P(X > x)$
   $\Leftrightarrow 0{,}10 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x + 0{,}5 - 38{,}4}{5{,}81}\right)$
   $\Leftrightarrow -1{,}2816 = \frac{x - 37{,}9}{5{,}81} \Leftrightarrow x = 37{,}9 - 1{,}2816 \cdot 5{,}81 = 30{,}454 \approx 30$
   d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von etwa 90% muss mit über 30 Rücktritten pro Jahr gerechnet werden.