

# Statistik-Klausur vom 09.02.2009

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

## Aufgabe 1

- a) Ein Unternehmen möchte den Einfluss seiner Werbemaßnahmen auf den erzielten Umsatz quantifizieren. Hierfür werden die jährlichen Ausgaben für Werbung und die jährlich erzielten Umsätze über einen Zeitraum von acht Jahren erfasst. Die Daten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Jahr	Werbung in 1000 €	Umsatz in 100 000 €
2000	6	9
2001	9	10
2002	10	13
2003	11	12
2004	12	10
2005	12	16
2006	13	15
2007	15	25

1. Berechnen und interpretieren Sie eine geeignete statistische Maßzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen den jährlichen Werbeausgaben und dem Umsatz.
  2. Angenommen das Unternehmen plant, 14 000 € für Werbung auszugeben. Mit welchem Umsatz kann es dann rechnen?
  3. Für wie verlässlich halten Sie Ihre Ergebnisse aus 2)? (Begründung!)
- b) Angenommen ein empirischer Korrelationskoeffizient nehme den Wert von null an. Können Sie dann daraus die Schlussfolgerung ziehen, dass die beiden Variablen stochastisch unabhängig voneinander sind? Begründen Sie kurz Ihre Meinung.

## Aufgabe 2

In der folgenden Tabelle ist der Verbraucherpreisindex für Nordrhein-Westfalen auf verschiedenen Basisjahren angegeben:

Jahr	Verbraucherpreisindex		
	Basisjahr 2005	Basisjahr 2000	Basisjahr 1995
1999			105,2
2000		100,0	106,9
2001		102,0	
2002		103,3	
2003		104,5	
2004		106,1	
2005	100,0	107,6	
2006	101,4		
2007	103,7		

- Berechnen Sie eine von 1999 bis 2007 durchgehende Indexreihe, die 2000 als Basisjahr hat.
- Wie hoch ist die Preissteigerung (Inflationsrate) insgesamt in Prozent in der Zeit von 1999 bis 2007?
- Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Preissteigerung (Inflationsrate) in Prozent in der Zeit von 1999 bis 2007?
- Wie hoch war der Kaufkraftverlust insgesamt in der Zeit von 1999 bis 2007?
- Im Jahr 2005 betragen die privaten Konsumausgaben in NRW insgesamt 307 669 Mio. Euro, im Jahr 2006 betragen die privaten Konsumausgaben in NRW insgesamt 314 118 Mio. Euro. Berechnen Sie die reale Zunahme der Konsumausgaben in Prozent von 2005 auf 2006.

### Aufgabe 3

Die Anzahl der Tage, die ein Kunde auf einen Neuwagen wartet, kann als normalverteilt angesehen werden mit dem Erwartungswert einundzwanzig Tage und der Standardabweichung zehn Tage.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde
  - höchstens einundzwanzig Tage auf seinen Neuwagen warten muss?
  - genau einundzwanzig Tage auf seinen Neuwagen warten muss?
  - zwischen zwanzig und dreißig Tagen auf seinen Neuwagen warten muss?
- Mit welcher Wartezeit auf den Neuwagen muss ein Kunde mit der Wahrscheinlichkeit von
  - 90% mindestens rechnen?
  - 95% höchstens rechnen?

- c) Eine Autofirma möchte den Anteil der Kunden, die länger als achtundzwanzig Tage auf einen Neuwagen warten müssen, mit Hilfe eines 99%-Konfidenzintervalls schätzen. In einer Umfrage stellt sich heraus, dass von 250 Käufern eines Neuwagens insgesamt 147 länger als achtundzwanzig Tage auf einen Neuwagen warten mussten. Berechnen Sie aus den Daten das 99%-Konfidenzintervall.

#### Aufgabe 4

Ein Unternehmen hat Forderungen an drei Kunden A,B und C. Die Höhe der Forderungen und die zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeiten (Wahrscheinlichkeit, dass eine Forderung nicht bezahlt wird) sind wie folgt gegeben:

Kunde	Höhe der Forderung in Geldeinheiten	Ausfall- Wahrscheinlichkeit
A	10 000	10%
B	20 000	8%
C	15 000	5%

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Forderungen

- an die Kunden A und B beide ausfallen, beträgt 0,8%
  - an die Kunden A und C beide ausfallen, beträgt 1,0%
  - an die Kunden B und C beide ausfallen, beträgt 1,0%
  - an alle drei Kunden A,B und C ausfallen, beträgt 0,2%
- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Forderungen an die Kunden A und C ausfällt.
- b) Sind die Ereignisse „Forderung an den Kunden A fällt aus“ und „Forderung an den Kunden B fällt aus“ stochastisch unabhängig?
- c) Sind die Ereignisse „Forderung an den Kunden B fällt aus“ und „Forderung an den Kunden C fällt aus“ stochastisch unabhängig?
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur die Forderung an Kunde B, nicht aber die Forderungen an die Kunden A und C ausfallen.
- e) Das Unternehmen möchte eine Rückstellung für drohende Verluste in Höhe des erwarteten Verlustes aus diesen drei Forderungen in die Bilanz einstellen. In welcher Höhe muss dieser Bilanzposten angesetzt werden?

Lösung zu Aufgabe 1:

- a)  $X$ =Werbeausgaben (in 1 000 Euro pro Jahr)  
 $Y$ =Jahres-Umsatz (in 100 000 Euro)

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
6	9			
9	10			
10	13			
11	12			
12	10			
12	16			
13	15			
15	25			
88	110	1 288	1 020	1 700

1.  $b_1 = \frac{8 \cdot 1\,288 - 88 \cdot 110}{8 \cdot 1\,020 - 88 \cdot 88} = \frac{624}{416} = 1,5$   
 $b_2 = \frac{624}{8 \cdot 1\,700 - 110 \cdot 110} = \frac{624}{1\,500} = 0,416$   
 $r = +\sqrt{1,5 \cdot 0,416} = 0,789\,936\,7$   
d.h. es liegt positive mittel starke Korrelation vor
2. Gesucht:  $a_1 + b_1 \cdot 14 = ?$   
 $a_1 = \frac{110 - 1,5 \cdot 88}{8} = -2,75$   
 $-2,75 + 1,5 \cdot 14 = 18,25$   
d.h. es ist mit einem Umsatz von 1 825 000 Euro zu rechnen.
3. Da es sich bei der Berechnung um eine Interpolation handelt und da der lineare Zusammenhang beinahe stark ist, hat der Prognosewert Verlass.

- b) Der empirische Korrelationskoeffizient zweier Variablen wird aus den Werten  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  berechnet und ist ein Maß für den linearen Zusammenhang der Werte  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$ .

Die stochastische Unabhängigkeit zweier Variablen ist eine Aussage über die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Variablen.

Insofern kann ausgehend von  $r_{xy} = 0$  für einen Datensatz aus  $X$  und  $Y$  nichts über die stochastische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  ausgesagt werden. Der Wert  $r_{xy} = 0$  besagt lediglich, dass kein linearer Zusammenhang zwischen den  $x$ -Werten und  $y$ -Werten vorliegt.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Jahr	Index
1999	$\frac{100}{106,9} \cdot 105,2 = 98,4$
2000	100,0
2001	102,0
2002	103,3
2003	104,5
2004	106,1
2005	107,6
2006	$\frac{107,6}{107,6} \cdot 101,4 = 109,1$
2007	$\frac{100}{107,6} \cdot 103,7 = 111,6$

b)  $\frac{111,6}{98,4} = 1,134146$   
d.h. die Preissteigerung beträgt 13 Prozent.

c)  $\sqrt[8]{1,134146} = 1,015859$   
d.h. die durchschnittliche jährliche Inflationsrate beträgt 1,6 %.

d) Kaufkraft =  $\frac{1}{1,134146} = 0,8817204$   
d.h. der Kaufkraftverlust beträgt 11,8 %.

e)  $W = \frac{314118}{307669} = 1,020961$  und  $P^{La} = \frac{101,4}{100} = 1,014$   
 $Q = \frac{W}{P} = \frac{1,020961}{1,014} = 1,006865$  d.h. die reale Steigerung beträgt 0,7%.

*Lösung zu Aufgabe 3:*

- a) 1.  $P(X \leq \mu) = 0,5$   
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 50%.
2.  $P(X = 21) = 0$   
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.
3.  $P(X \leq 30) - P(X \leq 20) = F\left(\frac{30-21}{10}\right) - F\left(\frac{20-21}{10}\right) = F(0,9) - F(-0,1) = 0,816 - 0,460 = 0,356$   
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 36%.
- b) 1.  $0,10 = P(X \leq x) \Rightarrow -1,2816 = \frac{x-21}{10} \Rightarrow x = 8,2$   
d.h. mit 90%iger Wahrscheinlichkeit ist mit einer Wartezeit von mindestens acht Tagen zu rechnen.
2.  $0,95 = P(X \leq x) \Rightarrow 1,6449 = \frac{x-21}{10} \Rightarrow x = 37,4$   
d.h. mit 95%iger Wahrscheinlichkeit ist mit einer Wartezeit von höchstens siebenunddreißig Tagen zu rechnen.

- c)  $p$ =Anteil der Kunden, die länger als achtundzwanzig Tage auf ihren Neuwagen warten müssen

$$\hat{p} = \frac{147}{250} = 0,588$$

Faustregel  $n = 250 \geq 100$  erfüllt

0,99-KI für  $p$

$$0,588 \pm 2,5758 \cdot \sqrt{\frac{0,588 \cdot 0,412}{250}} = [0,508; 0,668] \approx [51\%; 67\%]$$

Lösung zu Aufgabe 4:

$A$ =die Zahlung von Kunde A fällt aus

$B$ =die Zahlung von Kunde B fällt aus

$C$ =die Zahlung von Kunde C fällt aus

a) Arbeitstabelle

	$A$	$\bar{A}$	
$C$	0,01	0,04	0,05
$\bar{C}$	0,09	0,86	0,95
	0,10	0,90	1

$$P(A \cup C) = 1 - 0,86 = 0,14$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 14%.

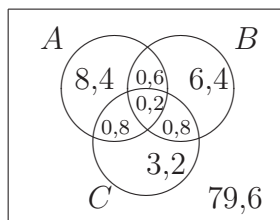
- b)  $P(A \cap B) = 0,008 = 0,10 \cdot 0,08 = P(A) \cdot P(B)$

d.h.  $A, B$  sind stochastisch unabhängig.

- c)  $P(B \cap C) = 0,01 \neq 0,004 = 0,08 \cdot 0,05 = P(B) \cdot P(C)$

d.h.  $B, C$  sind stochastisch abhängig.

- d) Wir tragen die Prozentzahlen in ein Venn-Diagramm ein:



$$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = 0,064$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 6,4%.

- e)  $X$ =Verlust (in Euro) aus den Forderungen an die drei Kunden

Verlust	Wkt.
45 000	0,002
30 000	0,006
25 000	0,008
35 000	0,008
10 000	0,084
20 000	0,064
15 000	0,032
0	0,796

$$E[X] = 45\,000 \cdot 0,002 + 30\,000 \cdot 0,006 + 25\,000 \cdot 0,008 + 35\,000 \cdot 0,008 + 10\,000 \cdot 0,084 + 20\,000 \cdot 0,064 + 15\,000 \cdot 0,032 + 0 \cdot 0,796 = 3\,350$$

d.h. es ist mit einem Verlust von 3 350 Euro zu rechnen.

2. Lösungsweg:

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cdot 10\,000 + P(A \cap B \cap \bar{C}) \cdot (10\,000 + 20\,000) + P(A \cap \bar{B} \cap C) \cdot (10\,000 + 15\,000) + P(\bar{A} \cap B \cap C) \cdot (20\,000 + 15\,000) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cdot 20\,000 + P(A \cap B \cap C) \cdot (10\,000 + 20\,000 + 15\,000) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cdot 15\,000 =$$

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cdot 10\,000 + P(A \cap B \cap \bar{C}) \cdot 10\,000 + P(A \cap \bar{B} \cap C) \cdot 10\,000 + P(A \cap B \cap C) \cdot 10\,000 + P(A \cap B \cap \bar{C}) \cdot 20\,000 + P(\bar{A} \cap B \cap C) \cdot 20\,000 + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cdot 20\,000 + P(A \cap B \cap C) \cdot 20\,000 + P(A \cap \bar{B} \cap C) \cdot 15\,000 + P(\bar{A} \cap B \cap C) \cdot 15\,000 + P(A \cap B \cap C) \cdot 15\,000 + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cdot 15\,000 =$$

$$P(A) \cdot 10\,000 + P(B) \cdot 20\,000 + P(C) \cdot 15\,000 = 10\,000 \cdot 0,1 + 20\,000 \cdot 0,08 + 15\,000 \cdot 0,05 = 3\,350$$