Statistik-Klausur vom 10. Juli 2007

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

a) Ein Unternehmen produziert und vertreibt Fahrräder vom Typ A, B und C. Insgesamt 35% der abgesetzten Fahrräder sind vom Typ A, 40% vom Typ B und 25% vom Typ C. Dabei werden 30% der Fahrräder vom Typ A außerhalb der EU verkauft. Von Typ B werden 25% und von Typ C 45% der Fahrräder außerhalb der EU abgesetzt. Vor der Auslieferung werden die Fahrräder einer Qualitätskontrolle unterzogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zufällig für die Qualitätskontrolle ausgewähltes Fahrrad später außerhalb der EU abgesetzt?

b) Ein Student nimmt im Sommersemester 2007 an zwei Klausuren in den Fächern Statistik und Recht teil. Er schätzt seine Chance, die Statistik-Klausur zu bestehen, mit 75% ein. In Recht schätzt er die Wahrscheinlichkeit, die Klausur zu bestehen, auf 80%. Der Student geht ferner davon aus, dass sein Klausurergebnis in Recht stochastisch unabhängig ist von seinem Klausurergebnis in Statistik. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht der Student mindestens eine der beiden Klausuren?

c) Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable X mit den folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten:

Wert x	$P(X = x)$
1	0,20
2	0,30
3	0,23
4	0,15
5	0,12

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 2

Ein PC-Händler verzeichnet in Abhängigkeit vom Verkaufspreis folgenden Absatz an PCs in den letzten fünf Verkaufsperioden:

Absatz in ME	Preis in GE pro ME	
20	2	
22	1,9	
16	2,2	
18	2,1	
25	1,8	

a) Welcher Absatz ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate zu erwarten, wenn ein Preis von 1,6 GE pro ME für die kommende Verkaufsperiode angesetzt wird?

b) Welcher Verkaufspreis ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate anzunehmen, damit der Absatz in der kommenden Verkaufsperiode 24 ME beträgt?

c) Wie verlässlich sind die Berechnungen unter a) und unter b)? (Begründung!)

Aufgabe 3

a) Bei einer Kundenanalyse wurden zwanzig Kunden befragt, seit wie vielen Jahren sie das Produkt A kaufen. Getrennt nach Geschlecht ergaben sich folgende Daten:

Frauen: 2 2 2 2 3 7 7 8 9 11
Männer: 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6

Berechnen und interpretieren Sie bitte für beide Datensätze getrennt die folgenden Kennzahlen:

1. arithmetisches Mittel
2. Modus
3. Median
4. Standardabweichung

b) Unterstellen Sie eine Normalverteilung für die Produkttreue (in Jahren) einer Kundin. Der Erwartungswert sei 5,3 Jahre, die Standardabweichung sei 3,3 Jahre.

1. Seit mindestens wie vielen Jahren kaufen 75% aller Kundinnen das Produkt?
2. Seit höchstens wie vielen Jahren kaufen 75% aller Kundinnen das Produkt?

Aufgabe 4

Für ein Land liegen folgende Daten über das Bruttoinlandsprodukt (BIP) in Mrd. Geldeinheiten vor:

Jahr	In Preisen von 2002	In jeweiligen Preisen
2002	2 000	2 000
2003	2 070	2 132,1
2004	2 105	2 189,2
2005	2 120	2 247,2
2006	2 180	2 376,2

a) Um wie viel Prozent ist das BIP im Zeitraum von 2002 bis 2006 im Durchschnitt pro Jahr nominal gewachsen?

b) Berechnen Sie für jedes Jahr den Mengenindex mit 2002 als dem Basisjahr.

1. Handelt es sich hierbei um einen Laspeyres- oder um einen Paasche-Mengenindex? Begründen Sie kurz Ihr Ergebnis.
2. Um wie viel Prozent ist das BIP im Zeitraum von 2002 bis 2006 im Durchschnitt pro Jahr real gewachsen?

c) Berechnen Sie für jedes Jahr den Preisindex mit 2002 als dem Basisjahr.

1. Handelt es sich hierbei um einen Laspeyres- oder um einen Paasche-Preisindex? Begründen Sie kurz Ihr Ergebnis.
2. Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Inflationsrate im Zeitraum 2002 bis 2006?

Aufgabe 5
Ein Maschinenbauunternehmen produziert Spezialmaschinen in zwei Werken A und B. Aufgrund einer Analyse der Vergangenheit ergibt sich, dass bei 15% der Maschinen aus Werk A und bei 12% der Maschinen aus Werk B der Liefertermin nicht eingehalten werden kann. In der kommenden Periode sollen aus der Produktion von Werk A vierzehn Maschinen und aus der Produktion von Werk B sechzehn Maschinen ausgeliefert werden. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen sowohl für Werk A als auch für Werk B eine geeignete Binomialverteilung und gehen Sie von der Annahme aus, dass die Produktionen in den Werken A und B (stochastisch) unabhängig sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in der kommenden Periode bei mindestens zwölf der insgesamt vierzehn Maschinen aus Werk A der Liefertermin eingehalten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in der kommenden Periode bei mindestens achtundzwanzig der insgesamt dreißig Maschinen aus den Werken A und B der Liefertermin eingehalten?

Lösung zu Aufgabe 1

a) A= zufällig ausgewähltes Rad ist vom Typ A
B= zufällig ausgewähltes Rad ist vom Typ B
C= zufällig ausgewähltes Rad ist vom Typ C
EU= zufällig ausgewähltes Rad wird innerhalb der EU verkauft
$\overline{EU}$= zufällig ausgewähltes Rad wird außerhalb der EU verkauft
Gegeben sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{lll} 0{,}35 = P(A) & 0{,}30 = P(\overline{EU} \mid A) \Rightarrow & P(A \cap \overline{EU}) = P(\overline{EU} \mid A) \cdot P(A) \\ & & = 0{,}30 \cdot 0{,}35 = 0{,}1050 \\ 0{,}40 = P(B) & 0{,}25 = P(\overline{EU} \mid B) \Rightarrow & P(B \cap \overline{EU}) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1000 \\ 0{,}25 = P(C) & 0{,}45 = P(\overline{EU} \mid C) \Rightarrow & P(C \cap \overline{EU}) = 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}1125 \end{array}$$

Arbeitstabelle:

	A	B	C	$\sum$
$\overline{EU}$	0,1050	0,1000	0,1125	0,3175
EU				
$\sum$	0,35	0,40	0,25	1

$P(\overline{EU}) = 0{,}3175$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,3175.

b) S=Student besteht Statistik-Klausur
R=Student besteht Recht-Klausur
Da R und S stochastisch unabhängig sind, gilt: $P(S \cap R) = P(S) \cdot P(R) =$

$0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$
Arbeitstabelle:

	R	$\overline{R}$	$\sum$
S	0,6	0,15	0,75
$\overline{S}$	0,2	0,05	0,25
$\sum$	0,8	0,2	1

$P(S \cup R) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 95%.

c) $E[X] = 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}23 + 4 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}12 = 2{,}69$
d.h. der Erwartungswert beträgt 2,69.

Lösung zu Aufgabe 2
x=Preis
y=Absatzmenge

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	2	20			
	1,9	22			
	2,2	16			
	2,1	18			
	1,8	25			
$\sum$	10	101	199,8	20,1	2 089

a) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 1{,}6 = ?$
$b_1 = \frac{5 \cdot 199{,}8 - 101 \cdot 10}{5 \cdot 20{,}1 - 10 \cdot 10} = -\frac{11}{0{,}5} = -22$
$a_1 = \frac{101 - (-22) \cdot 10}{5} = 64{,}2$
$64{,}2 - 22 \cdot 1{,}6 = 29{,}0$
d.h. es ist mit einem Absatz von etwa 29 ME zu rechnen.

a) Gesucht: $a_2 + b_2 \cdot 24 = ?$
$b_2 = \frac{-11}{5 \cdot 2\,089 - 101 \cdot 101} = -\frac{11}{244} = -0{,}045$
$a_2 = \frac{10 - (-0{,}045) \cdot 101}{5} = 2{,}91$
$2{,}91 - 0{,}045 \cdot 24 = 1{,}83$
d.h. es ist ein Preis von etwa 1,83 GE anzusetzen.

c) $B = b_1 \cdot b_2 = (-22) \cdot (-0{,}045) = 0{,}99$
$r = -\sqrt{B} = -\sqrt{0{,}99} = -0{,}995$
d.h. es liegt eine starke negative Korrelation vor.
Bei der Berechnung unter a) ist wenig Verlass, da es sich um eine Extrapolation handelt. Bei der Berechnung unter b) ist Verlass, da es sich um eine Interpolation handelt und da die Korrelation stark ist.

Lösung zu Aufgabe 3:
X=Anzahl der Jahre, seitdem eine Kundin das Produkt A kauft
Y=Anzahl der Jahre, seitdem ein Kunde das Produkt A kauft

a) 1. $\overline{x} = 5{,}3$ und $\overline{y} = 5$
d.h. die Frauen kaufen im Durchschnitt seit 5,3 Jahren das Produkt A, die Männer im Durchschnitt erst seit fünf Jahren.

2. $x_{0,50} = 3$ und $y_{0,50} = 5$
d.h. 50% der befragen Frauen kaufen das Produkt seit höchstens drei Jahren, mindestens 50% der befragten Männer kaufen das Produkt seit höchstens fünf Jahren.

3. $x_{\text{Modus}} = 2$ und $y_{\text{Modus}} = 5$
d.h. bei den befragten Frauen war zwei Jahre die häufigste Antwort, bei den befragten Männern war fünf Jahre die häufigste Antwort.

4. $s_x = \sqrt{10{,}81} = 3{,}29$ und $s_y = \sqrt{0{,}2} = 0{,}45$
d.h. bei den Frauen schwanken die Angaben stärker um den Durchschnittswert als bei den Männern. Oder anders ausgedrückt: Bei den Männern schwanken die Angaben weniger um den Durchschnittswert als bei den Frauen.

b) $X \sim \mathsf{NV}(\mu = 5{,}3; \sigma = 3{,}3)$

1. $0{,}25 = P(X \leq x) = F_U(\frac{x - 5{,}3}{3{,}3})$
$-0{,}6744898 = \frac{x - 5{,}3}{3{,}3} \Rightarrow x = 3{,}07$
d.h. etwa 75% aller Kundinnen kaufen das Produkt seit mindestens drei Jahren.

2. $0{,}75 = P(X \leq x) = F_U(\frac{x - 5{,}3}{3{,}3})$
$0{,}6744898 = \frac{x - 5{,}3}{3{,}3} \Rightarrow x = 7{,}53$
d.h. etwa 75% aller Kundinnen kaufen das Produkt seit höchstens 7 1/2 Jahren.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $W = \sqrt[2006-2002]{\frac{2\,376{,}2}{2\,000}} = \sqrt[4]{1{,}1881} = 1{,}044$
d.h. durchschnittlich ist das BIP im Zeitraum 2002 bis 2006 um 4,4% pro Jahr nominal gewachsen.

b) $Q^{\text{La}}_{02,03} = \frac{2\,070}{2\,000} = 1{,}0350$
$Q^{\text{La}}_{02,04} = \frac{2\,105}{2\,000} = 1{,}0525$
$Q^{\text{La}}_{02,05} = \frac{2\,120}{2\,000} = 1{,}06$
$Q^{\text{La}}_{02,06} = \frac{2\,180}{2\,000} = 1{,}09$

1. Da die Preise aus dem Basisjahr 2002 stammen, handelt es sich um einen Laspeyres-Mengenindex.
2. $\sqrt[2006-2002]{1{,}09} = \sqrt[4]{1{,}09} = 1{,}0218$
   d.h. durchschnittlich ist das BIP im Zeitraum 2002 bis 2006 um 2,18% pro Jahr real gewachsen.

c) $P^{\text{Pa}}_{02,03} = \dfrac{2\,132{,}1}{2\,070} = 1{,}03$

$P^{\text{Pa}}_{02,04} = \dfrac{2\,189{,}2}{2\,105} = 1{,}04$

$P^{\text{Pa}}_{02,05} = \dfrac{2\,247{,}2}{2\,120} = 1{,}06$

$P^{\text{Pa}}_{02,06} = \dfrac{2\,376{,}2}{2\,180} = 1{,}09$

1. Da die Mengen aus dem Berichtsjahr stammen, handelt es sich um einen Paasche-Mengenindex.
2. $\sqrt[2006-2002]{1{,}09} = \sqrt[4]{1{,}09} = 1{,}0218$
   d.h. die durchschnittliche jährliche Inflationsrate im Zeitraum 2002 bis 2006 beträgt +2,18% .

Lösung zu Aufgabe 5:

a) X=Anzahl der Maschinen aus Werk A mit eingehaltenem Liefertermin

$X \sim \mathsf{B}(n = 14; p = 0{,}85)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 12) &= P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) \\ &= \binom{14}{12} \cdot 0{,}85^{12} \cdot 0{,}15^2 + \binom{14}{13} \cdot 0{,}85^{13} \cdot 0{,}15 + \binom{14}{14} \cdot 0{,}85^{14} \cdot 0{,}15^0 \\ &= 0{,}2912 + 0{,}2539 + 0{,}1028 \\ &= 0{,}6479 \end{aligned}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,6479.

b) Y=Anzahl der Maschinen aus Werk B mit eingehaltenem Liefertermin

$Y \sim \mathsf{B}(n = 16; p = 0{,}88)$

X, Y stoch. unabhängig

$P(X + Y \geq 28) = P(X + Y = 28) + P(X + Y = 29) + P(X + Y = 30)$

$$\begin{aligned} P(X + Y = 28) &= P(X = 14) \cdot P(Y = 14) + P(X = 13) \cdot P(Y = 15) \\ &\quad + P(X = 12) \cdot P(Y = 16) \\ &= 0{,}1028 \cdot \binom{16}{14} \cdot 0{,}88^{14} \cdot 0{,}12^2 + 0{,}2539 \cdot \binom{16}{15} \cdot 0{,}88^{15} \cdot 0{,}12 \\ &\quad + 0{,}2912 \cdot \binom{16}{16} \cdot 0{,}88^{16} \cdot 0{,}12^0 \\ &= 0{,}1028 \cdot 0{,}2886 + 0{,}2539 \cdot 0{,}2822 + 0{,}2912 \cdot 0{,}1293 \\ &= \boxed{0{,}1390} \\ P(X + Y = 29) &= P(X = 14) \cdot P(Y = 15) + P(X = 13) \cdot P(Y = 16) \\ &= 0{,}1028 \cdot 0{,}2822 + 0{,}2539 \cdot 0{,}1293 \\ &= \boxed{0{,}0618} \end{aligned}$$

$P(X + Y = 30) = P(X = 14) \cdot P(Y = 16) = 0{,}1028 \cdot 0{,}1293 = \boxed{0{,}0133}$

$P(X + Y \geq 28) = 0{,}1390 + 0{,}0618 + 0{,}0133 = 0{,}2141$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,2141.