

Statistik-Klausur vom 12. Juli 2005

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

Die Divino GmbH plant für den Herbst die Markteinführung eines innovativen Partygetränks. Zur Abschätzung des Marktpotenzials dieses neuen Produktes wurde das Getränk in fünf räumlich getrennten Testmärkten zu verschiedenen Preisen einen Monat lang angeboten. In der folgenden Tabelle sind die Preise pro Liter in € und die abgesetzten Mengen in Liter während der Testphase für die fünf Märkte aufgelistet:

Absatzmenge in Liter	Preis pro Liter in €
500	2
300	6
400	3
200	5
350	4

- Die Divino GmbH beabsichtigt, im Einführungsmonat das innovative Partygetränk für 5,50 € pro Liter anzubieten. Mit welcher Absatzmenge kann sie in diesem Monat aufbauend auf den Ergebnissen aus den Testmärkten rechnen?
- Angenommen die Divino GmbH möchte 600 Liter im Monat absetzen. Welchen Preis pro Liter sollte sie dann für das Partygetränk verlangen?
- Kann sich die Divino GmbH auf die Ergebnisse aus a) und b) verlassen? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2

Eine Befragung von 1 000 Studierenden an einer westdeutschen Universität ergab folgende Verteilung der monatlichen Einkommen in €:

Monatliche Einkommen in € von ... bis unter ...	Anzahl der befragten Studierenden
250 – 750	350
750 – 1 250	400
1 250 – 1 750	150
1 750 – 2 250	50
2 250 – 2 750	50
	ges.: 1 000

- Berechnen Sie das monatliche Durchschnittseinkommen (Pro-Kopf-Einkommen).
- Die Armutsgrenze liegt in Westdeutschland bei 730 €. Wie hoch ist der Anteil der Studierenden, die unterhalb der Armutsgrenze liegen?
- Im kommenden Semester beabsichtigt die Regierung, Studiengebühren einzuführen. Folgende Vorschläge seitens der Regierung liegen vor:

- Die monatlichen Studiengebühren eines jeden Studierenden betragen 8% des monatlichen Einkommens.
- Jeder Studierende muss unabhängig von seinem monatlichen Einkommen 80 € pro Monat an Studiengebühren bezahlen.

Berechnen Sie für beide Vorschläge das monatliche Durchschnittseinkommen, das den Studierenden nach Abzug der Studiengebühren verbleibt.

Aufgabe 3

Die Deutsche Bundesbank veröffentlichte in diversen Monatsberichten folgende Angaben zum Preisindex für die Lebenshaltung auf Basis 1995=100, zum neuen Verbraucherpreisindex auf Basis 2000=100 und zum Preisindex für Energie auf Basis 2000=100:

Jahr	Preisindex für die Lebenshaltung (1995=100)	Verbraucherpreisindex insgesamt (2000=100)	Preisindex für Energie (2000=100)
1998	104,3		
1999	104,9		
2000	106,9	100,0	100,0
2001		102,0	105,7
2002		103,4	106,0
2003		104,5	110,2
2004		106,2	114,8

- Was besagt der Indexstand von 106,2 für den Verbraucherpreisindex im Jahr 2004?
- Für den Preisanstieg seit dem Basisjahr 2000 wird vielfach die Preissteigerung für Energie verantwortlich gemacht. Um wie viel Prozent wären die Verbraucherpreise ohne Energie im Zeitraum von 2000 bis 2004 gestiegen? Gehen Sie bei Ihrer Berechnung davon aus, dass das Gewicht von Energie bezogen auf alle Verbrauchsausgaben 4,7 % beträgt.
- Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Inflationsrate im Zeitraum von 1998 bis 2004?

Aufgabe 4

In regelmäßigen Abständen beauftragt ein Unternehmen ein Marktforschungsinstitut, den Marktanteil seines wichtigsten Produkts zu untersuchen. In der Vergangenheit lag der beobachtete Marktanteil bei ca. 3,7 %. Das Marktforschungsinstitut rechnet mit dem Unternehmen folgendes Honorar ab:

$$\begin{aligned} \text{Honorar} &= \text{Fixhonorar} + \text{Kostensatz mal Anzahl der befragten Personen} \\ &= 25\,000 \text{ GE} + 10 \text{ GE} \cdot \text{Anzahl der befragten Personen} \end{aligned}$$

Das Unternehmen bittet das Marktforschungsinstitut, die nächste Befragung so zu gestalten, dass sich aus den Ergebnissen ein Konfidenzintervall mit der Breite von höchstens fünf Prozentpunkten ableiten lässt.

- Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, wenn das Konfidenzintervall ein Konfidenzniveau von 95 % haben soll? Welches Honorar ergibt sich für das Marktforschungsinstitut?

- b) Um wie viel Prozent erhöht sich das Honorar, wenn anstelle eines 95 %-Konfidenzintervall ein 99 %-Konfidenzintervall (ebenfalls mit einer Breite von höchstens fünf Prozentpunkten) als Ergebnis angestrebt wird?

Aufgabe 5

Weltweit werden 30% aller Koffer von Fluggesellschaft A transportiert, 20% aller Koffer von Fluggesellschaft B, 10% aller Koffer von Fluggesellschaft C, der Rest der Koffer wird von den übrigen Fluggesellschaften transportiert. Im Schnitt gehen bei Fluggesellschaft A jeder 40. Koffer verloren, bei Fluggesellschaft B jeder 50. Koffer, bei Fluggesellschaft C jeder 100. Koffer, und bei den übrigen Fluggesellschaften geht im Schnitt jeder 200. Koffer verloren.

- a) Wie hoch ist unter den verloren gegangenen Koffern der Anteil der Koffer, die aufgegeben wurden bei
- Fluggesellschaft A?
 - Fluggesellschaft B?
 - Fluggesellschaft C?
- b) Bei Fluggesellschaft A werden pro Tag etwa 3 200 Koffer aufgegeben. Wie groß ist annähernd die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fluggesellschaft A am Tag höchstens 95 Koffer verloren gehen, wenn das Verschwinden einzelner Koffer stochastisch unabhängig voneinander geschieht?

Lösung zu Aufgabe 1:

Lineare Regression:

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	2	500			
2	6	300			
3	3	400			
4	5	200			
5	4	350			
Σ	20	1 750	6 400	90	662 500

- a) Gesucht: $f(5,5) = a_1 + b_1 \cdot 5,5 = ?$

$$b_1 = \frac{5 \cdot 6\,400 - 20 \cdot 1\,750}{5 \cdot 90 - 20^2} = \frac{-3\,000}{50} = -60$$

$$a_1 = \frac{1\,750 - (-60) \cdot 20}{5} = 590$$

$$f(5,5) = 590 - 60 \cdot 5,5 = 260$$

d.h. es kann mit einer Absatzmenge von 260 Litern gerechnet werden.

- b) Gesucht: $g(600) = a_2 + b_2 \cdot 600 = ?$

$$b_2 = \frac{-3\,000}{5 \cdot 662\,500 - 1\,750^2} = -\frac{3\,000}{250\,000} = -0,012$$

$$a_2 = \frac{20 - (-0,012) \cdot 1750}{5} = 8,2$$

$$g(600) = 8,2 - 0,012 \cdot 600 = 1$$

d.h. der Preis ist mit einem Euro pro Liter festzulegen.

c) Bestimmtheitsmaß $B = b_1 \cdot b_2 = (-60) \cdot (-0,012) = 0,72$

Korrelationskoeffizient $r = -\sqrt{0,72} = -0,8485$

d.h. es liegt ein starker negativer linearer Zusammenhang vor.

d.h. auf die Berechnung unter a) ist Verlass, weil es sich insb. um eine Interpolation handelt.

Und auf die Berechnung unter b) ist nur eingeschränkt Verlass, da es sich insb. um eine Extrapolation handelt.

Lösung zu Aufgabe 2:

X =Einkommen (in €) eines Studierenden pro Monat

a) $\bar{x} \approx 500 \cdot 0,35 + 1000 \cdot 0,4 + 1500 \cdot 0,15 + 2000 \cdot 0,05 + 2500 \cdot 0,05 = 1025$

d.h. das monatliche Durchschnittseinkommen liegt bei etwa 1025 €

b) $F(730) \approx 0 + \frac{0,35}{500}(730 - 250) = 0,336$

d.h. etwa 34 % der Studierenden liegen unterhalb der Armutsgrenze.

c) $Y = 0,92 \cdot X \Rightarrow \bar{y} = 0,92 \cdot \bar{x} = 0,92 \cdot 1025 = 943$

d.h. betragen die monatlichen Studiengebühren 8 % des Einkommens, so liegt das monatliche Einkommen nach Abzug der Studiengebühren im Durchschnitt bei 943 €.

$$Z = X - 80 \Rightarrow \bar{z} = \bar{x} - 80 = 1025 - 80 = 945$$

d.h. betragen die monatlichen Studiengebühren 80 €, so liegt das monatliche Einkommen nach Abzug der Studiengebühren im Durchschnitt bei 945 €.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Der Verbraucherpreisindex ist im Zeitraum von 2000 bis 2004 um insgesamt 6,2 % gestiegen.

b) Wir betrachten nur die beiden Bedarfsgruppen „Energie“ und „alle Bedarfsgruppen, jedoch ohne Energie“

Der Preisindex für die erste Bedarfsgruppe beträgt 114,8 und das zugehörige Gewicht beträgt 4,7 %.

Der Preisindex für die zweite Bedarfsgruppe ist gesucht und wird im Folgenden mit x bezeichnet. Das zugehörige Gewicht der zweiten Bedarfsgruppe beträgt: $100\% - 4,7\% = 95,3\%$
Der gesamte Preisindex von 106,2 lässt sich wie folgt aus den beiden Bedarfsgruppen berechnen:

$$106,2 = 0,953 \cdot x + 0,047 \cdot 114,8 \Rightarrow x = \frac{106,2 - 0,047 \cdot 114,8}{0,953} = 105,8$$

d.h. ohne die Ausgaben für Energie wäre der Verbraucherpreisindex im Zeitraum von 2000 bis 2004 um insgesamt 5,8 % gestiegen.

$$\begin{array}{l}
\text{c) Steigerung im Zeitraum 1998 bis 2000: } \frac{106,9}{104,3} = 1,0249280 \hat{=} + 2,49280\% \\
\text{Steigerung im Zeitraum 2000 bis 2004: } +6,2\% \\
\hline
\text{Steigerung im Zeitraum 1998 bis 2004: } 1,0249280 \cdot 1,062 = 1,088474
\end{array}$$

durchschnittliche jährliche Steigerung im Zeitraum von 1998 bis 2004:

$$\sqrt[6]{1,088474} = \sqrt[6]{1,088474} = 1,0142 \hat{=} + 1,4\%$$

d.h. im Zeitraum von 1998 bis 2004 betrug die durchschnittliche jährliche Inflationsrate +1,4 %.

Lösung zu Aufgabe 4:

Breite der Konfidenzintervalle: 0,05

halbe Breite der Konfidenzintervalle: $\epsilon = 0,025$

a) Mindeststichprobenumfang (Worstcase):

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,025^2} = 1\,536,6$$

d.h. es sind mindestens 1 537 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25\,000 + 10 \cdot 1\,537 = 40\,370$$

d.h. das Honorar würde 40 370 GE betragen.

oder

Mindeststichprobenumfang:

$$\hat{p}_{\text{alt}} = 0,037$$

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,037 \cdot 0,963}{0,025^2} = 219,01$$

d.h. es sind mindestens 220 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25\,000 + 10 \cdot 220 = 27\,200$$

d.h. das Honorar würde 27 200 GE betragen.

b) Mindeststichprobenumfang (Worstcase):

$$n \geq \frac{2,5758^2 \cdot 0,25}{0,025^2} = 2\,653,9$$

d.h. es sind mindestens 2 654 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25\,000 + 10 \cdot 2\,654 = 51\,540 \text{ und } \frac{51\,540}{40\,370} = 1,277$$

d.h. das Honorar würde sich um etwa 28 % erhöhen.

oder

Mindeststichprobenumfang:

$$\hat{p}_{\text{alt}} = 0,037$$

$$n \geq \frac{2,5758^2 \cdot 0,037 \cdot 0,963}{0,025^2} = 378,2$$

d.h. es sind mindestens 379 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25\,000 + 10 \cdot 379 = 28\,790 \text{ und } \frac{28\,790}{27\,200} = 1,0585$$

d.h. das Honorar würde sich um etwa 6 % erhöhen.

Lösung zu Aufgabe 5:

A= ein Koffer wird bei Fluggesellschaft A aufgegeben

B = ein Koffer wird bei Fluggesellschaft B aufgegeben
 C = ein Koffer wird bei Fluggesellschaft C aufgegeben
 D = ein Koffer wird bei den übrigen Fluggesellschaften aufgegeben
 V = ein Koffer geht verloren

Dann sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(V | A) = 1/40 = 0,025 \quad P(A) = 0,3$$

$$P(V | B) = 1/50 = 0,02 \quad P(B) = 0,2$$

$$P(V | C) = 1/100 = 0,01 \quad P(C) = 0,1$$

$$P(V | D) = 1/200 = 0,005 \quad P(D) = 0,40$$

Daraus ergibt sich:

$$P(A \cap V) = P(V | A) \cdot P(A) = 0,0075$$

$$P(B \cap V) = P(V | B) \cdot P(B) = 0,004$$

$$P(C \cap V) = P(V | C) \cdot P(C) = 0,001$$

$$P(D \cap V) = P(V | D) \cdot P(D) = 0,002$$

Arbeitstabelle:

	A	B	C	D	
V	0,0075	0,0040	0,0010	0,0020	0,0145
\bar{V}	0,3	0,2	0,1	0,4	1

a) $P(A | V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,0075}{0,0145} = 0,517 = 52\%$

d.h. 52 % aller verloren gegangenen Koffer wurden bei Fluggesellschaft A aufgegeben.

$$P(B | V) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,004}{0,0145} = 0,276 = 28\%$$

d.h. 28 % aller verloren gegangenen Koffer wurden bei Fluggesellschaft B aufgegeben.

$$P(C | V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,001}{0,0145} = 0,069 = 7\%$$

d.h. 7 % aller verloren gegangenen Koffer wurden bei Fluggesellschaft C aufgegeben.

b) X = Anzahl der an einem Tag verschwundenen Koffer bei Gesellschaft A

$$X \approx \mathbf{B}(n = 3\,200; p = 0,025)$$

Faustregel für ZGWS erfüllt: $n \cdot p = 80 \geq 10$ und $n \cdot (1 - p) = 3\,120 \geq 10$

$$P(X \leq 95) \approx F_U \left(\frac{95 + 0,5 - 80}{\sqrt{80 \cdot 0,975}} \right) = F_U(1,7550) = 0,96$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt annähernd 0,96.