

Statistik-Klausur vom 15. Juli 2008

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

An einer Umfrage nahmen insgesamt 200 Unternehmen teil. In der nachfolgenden Tabelle stehen die Unternehmen nach Beschäftigtengrößenklassen geordnet:

Beschäftigten- größen- klassen	Anzahl der Unter- nehmen
1 bis unter 10	10
10 bis unter 20	50
20 bis unter 200	90
200 bis unter 1 000	40
1 000 oder mehr	10

- Welche Beschäftigtenanzahl wird von 75% aller Unternehmen nicht überschritten?
- Wie viel Prozent der befragten Unternehmen haben mehr als 120 Beschäftigte?
- Wie hoch ist das Niveau der Daten? Beantworten Sie diese Frage durch die Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.
- Wie stark sind die Unterschiede in den Daten? Beantworten Sie diese Frage durch die Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.

Aufgabe 2

Eine Unternehmung beobachtet in den letzten sechs Perioden die folgenden Produktionsmengen (in ME) und Kosten (in GE):

Periode	Produktions- menge	Kosten
1	5	345
2	7	380
3	3	340
4	8	375
5	9	405
6	6	365

Das Unternehmen interessiert sich für eine Kostenfunktion, d.h. für eine Berechnungsvorschrift, mit der die Kosten in Abhängigkeit der Produktionsmenge prognostiziert werden können.

- Untersuchen Sie, ob aufgrund der Datenlage die Annahme einer linearen Kostenfunktion gerechtfertigt ist.

- b) Berechnen Sie mittels der Methode der kleinsten Quadrate die lineare Kostenfunktion.
- c) Prognostizieren Sie mittels der in b) berechneten Kostenfunktion die Kosten, wenn vier Mengeneinheiten produziert werden. Wie beurteilen Sie die Prognose?
- d) Prognostizieren Sie mittels der in b) berechneten Kostenfunktion die Kosten, wenn zehn Mengeneinheiten produziert werden. Wie beurteilen Sie die Prognose?

Aufgabe 3

Im Jahr 2007 kamen 74% aller Hochschulabsolventen von einer Uni, 25% von einer FH und 1% von einer Berufsakademie. Unterstellen Sie für diese Absolventen folgende Daten (Zahlen sind angelehnt an eine Umfrage der DIHK):

Rund 54% der eingestellten Hochschulabsolventen kamen von einer Uni, 37% von einer FH und 9% von einer Berufsakademie. Gehen Sie davon aus, dass insgesamt 10% aller Hochschulabsolventen im Jahr 2007 eingestellt wurden.

- a) Wie viel Prozent der Uni-Absolventen wurden eingestellt?
- b) Wie viel Prozent der FH-Absolventen wurden eingestellt?
- c) Wie viel Prozent der Berufsakademie-Absolventen wurden eingestellt?

Aufgabe 4

Der deutsche Basketballprofi Dirk Nowitzki spielt für die Dallas Mavericks in der amerikanischen Profiliga NBA. In der Saison 2006/2007 wurde er als erster Europäer zum wertvollsten Spieler der NBA gewählt. Mitentscheidend für diese Wahl dürfte gewesen sein, dass er in der Saison 2006/2007 eine Trefferquote von 90,3 Prozent bei Freiwürfen erzielen konnte. Man kann davon ausgehen, dass der Erfolg bei einem Freiwurf stochastisch unabhängig davon ist, dass Dirk Nowitzki bereits den vorherigen Freiwurf erfolgreich absolvierte.

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Dirk Nowitzki
 1. dreimal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist?
 2. bei zehn Freiwurf-Versuchen genau sieben Treffer erzielt?
 3. bei zehn Freiwurf-Versuchen mindestens sieben Treffer erzielt?
 4. bei zehn Freiwurf-Versuchen mindestens dreimal daneben wirft?
- b) In der Vorbereitung zur nachfolgenden Saison lässt der Trainer Dirk Nowitzki nacheinander 120 Freiwürfe werfen. Welche Höchstzahl an Freiwürfen wird er bei einer Wahrscheinlichkeit von 90% näherungsweise erfolgreich absolvieren können?

Lösung zu Aufgabe 1

X = Anzahl der Beschäftigten eines Unternehmens

Klasse	n_j	n_j/n	$F(x_j)$
1 – 10	10	0,05	0,05
10 – 20	50	0,25	0,30
20 – 200	90	0,45	0,75
200 – 1 000	40	0,20	0,95
mehr als 1 000	10	0,05	1

- a) $F(200) = 0,75$
d.h. 75% aller Unternehmen haben unter 200 Beschäftigte.
- b) $F(120) = 0,3 + \frac{0,45}{180} \cdot (120 - 20) = 0,55$
 $1 - 0,55 = 0,45$
d.h. etwa 45% aller Unternehmen haben mehr als 120 Beschäftigte.
- c) $x_{0,50} \approx 20 + \frac{0,50 - 0,30}{0,45} \cdot 180 = 100$
d.h. etwa 50% aller Unternehmen haben höchstens 100 Beschäftigte.
- d) $x_{0,25} \approx 10 + \frac{0,25 - 0,05}{0,25} \cdot 10 = 18$
 $x_{0,75} - x_{0,25} = 200 - 18 = 182$
d.h. der Quartilsabstand liegt bei etwa 182 Beschäftigten.

Lösung zu Aufgabe 2

X = Produktionsmenge (in ME) Y = Kosten (in GE)

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	5	345			
2	7	380			
3	3	340			
4	8	375			
5	9	405			
6	6	365			
Σ	38	2 210	14 240	264	816 900

- a) $b_1 = \frac{6 \cdot 14\,240 - 38 \cdot 2\,210}{6 \cdot 264 - 38 \cdot 38} = \frac{1\,460}{140} = 10,42857$
 $b_2 = \frac{1\,460}{6 \cdot 816\,900 - 2\,210 \cdot 2\,210} = \frac{1\,460}{17\,300} = 0,08439306$
 $r = \sqrt{10,42857 \cdot 0,08439306} = 0,938136$
d.h. die Annahme einer linearen Kostenfunktion ist gerechtfertigt, da ein (positiv) starker linearer Zusammenhang vorliegt.
- b) $a_1 = \frac{2\,210 - 10,42857 \cdot 38}{6} = 302,28571$
d.h. Kosten $K(x) = 302,28571 + 10,42857 \cdot x$

- c) $K(4) = 302,28571 + 10,42857 \cdot 4 = 344$
d.h. bei der Produktion von vier Mengeneinheiten ist mit Kosten in Höhe von 344 Geldeinheiten zu rechnen.
Da es sich bei der Prognose um eine Interpolation handelt und die Korrelation stark ist, kann die Prognose als verlässlich beurteilt werden.
- d) $K(10) = 302,28571 + 10,42857 \cdot 10 = 406,5714$
d.h. bei der Produktion von zehn Mengeneinheiten ist mit Kosten in Höhe von 407 Geldeinheiten zu rechnen. Da es sich bei der Prognose um eine Extrapolation handelt, ist die Prognose als nicht verlässlich zu beurteilen.

Lösung zu Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Anteile:

$$P(E) = 0,1$$

$$0,74 = P(Uni) \quad 0,54 = P(Uni | E) \Rightarrow P(E \cap Uni) = 0,54 \cdot 0,1 = 0,054$$

$$0,25 = P(FH) \quad 0,37 = P(FH | E) \Rightarrow P(E \cap FH) = 0,37 \cdot 0,1 = 0,037$$

$$0,01 = P(B) \quad 0,09 = P(B | E) \Rightarrow P(E \cap B) = 0,09 \cdot 0,1 = 0,009$$

Arbeitstabelle:

	Uni	FH	B	
E	0,054	0,037	0,009	0,100
\bar{E}				
	0,74	0,25	0,01	1

a) $P(E | Uni) = \frac{0,054}{0,74} = 0,0729$

b) $P(E | FH) = \frac{0,037}{0,25} = 0,148$

c) $P(E | B) = \frac{0,009}{0,01} = 0,90$

d.h. von den Uni-Absolventen wurden 7,3% eingestellt, von den FH-Absolventen 14,8% und von den Absolventen einer Berufsakademie wurden 90% eingestellt.

Lösung zu Aufgabe 4

X = Anzahl der Treffer unter n Würfeln

a) $X \sim B(n; p = 0,903)$

1. $0,903 \cdot 0,903 \cdot 0,903 = 0,736$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 73,6%.

2. $n = 10$
 $P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0,903^7 \cdot 0,097^3 = 0,05361801$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 5,4%.

3. $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$\begin{aligned}
P(X = 8) &= \binom{10}{8} \cdot 0,903^8 \cdot 0,097^2 = 0,1871794 \\
P(X = 9) &= \binom{10}{9} \cdot 0,903^9 \cdot 0,097^1 = 0,3872233 \\
P(X = 10) &= \binom{10}{10} \cdot 0,903^{10} \cdot 0,097^0 = 0,3604770 \\
&\qquad\qquad\qquad \hline
&\qquad\qquad\qquad 0,9348796
\end{aligned}$$

$P(X \geq 7) = 0,0536 + 0,9349 = 0,9885$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 98,9%.

4. $P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - 0,9349 = 0,0651$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 6,5%.

b) $n = 120$

$$np = 120 \cdot 0,903 = 108,36 \geq 10 \text{ ok}$$

$$n(1 - p) = 120 \cdot 0,097 = 11,64 \geq 10 \text{ ok}$$

$$\text{ZGWS: } X \approx \mathbf{N}(\mu = 108,36; \sigma^2 = 10,51092)$$

$$0,90 = P(X \leq x) = F_U \left(\frac{x + 0,5 - 108,36}{\sqrt{10,51092}} \right)$$

$$1,2816 = \frac{x + 0,5 - 108,36}{\sqrt{10,51092}} \Rightarrow x = 108,36 - 0,5 + 1,2816 \cdot \sqrt{10,51092} = 112,0150$$

d.h. er wird höchstens etwa 112 Treffer erzielen.