

# Statistik-Klausur vom 17.07.2009

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

## Aufgabe 1

Ein Unternehmen hat die monatlichen Bruttogehälter in EUR in einem Produktionsbereich mit 200 Beschäftigten untersucht. Die Auswertung der Unterlagen der Buchhaltung lieferte die folgenden Werte:

Klasse-Nr	Bruttomonatsgehalt über ... bis maximal ... (in EUR)	Anzahl Beschäftigte
1	500 bis 1 500	40
2	1 500 bis 2 500	64
3	2 500 bis 3 500	80
4	3 500 bis 4 500	12
5	4 500 bis 5 500	4
Summe		200

- Welche Skalierung weist die statistische Variable „monatliches Bruttogehalt eines Beschäftigten“ auf? Ist die Variable stetig oder diskret?
- Welches Gehalt wird von 25 Prozent der Beschäftigten nicht überschritten?
- Wie viel Prozent der Beschäftigten im Produktionsbereich verdienen mehr als 3 000 EUR?
- Ermitteln Sie das arithmetische Mittel sowie den Modus und erläutern Sie die Aussage der beiden Lageparameter.
- Wie stark sind die Unterschiede in den Daten? Beantworten Sie diese Frage durch die Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.

## Aufgabe 2

Die monatlichen Handygebühren  $X$  (in Euro) eines Mobilfunknutzers sind normalverteilt.

- Es soll der Anteil der Intensivnutzer, das sind Personen, bei denen über 50 Euro pro Monat an Handygebühren anfallen, geschätzt werden. Wie viele Mobilfunknutzer sind mindestens zu befragen, damit ein 0,95 Konfidenzintervall für den Anteil der Intensivnutzer höchstens die Breite von sechs Prozentpunkten hat?
- Eine Stichprobe unter 1 287 Mobilfunknutzern ergab folgende Werte:

$i$	$x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	41,37	2,17
2	44,56	21,68
⋮		
1 287	41,36	2,13
$\Sigma$	51 351,44	31 449,98

Berechnen und interpretieren Sie anhand der Stichprobe ein 0,95-Konfidenzintervall für die mittlere Höhe der Handygebühren eines Mobilfunknutzers.

- c) Nehmen Sie an, dass die zugrunde liegende Normalverteilung den Erwartungswert 40 Euro und die Standardabweichung fünf Euro hat. Wie hoch ist der Anteil der Mobilfunknutzer, die über 30 Euro, jedoch höchstens 42 Euro pro Monat für Handygebühren ausgeben?

### Aufgabe 3

Eine Unternehmung unterzieht alle Produkte vor dem Verkauf einer zweistufigen Qualitätsprüfung. Produkte, bei denen die Unternehmung in der ersten Stufe der Qualitätsprüfung Mängel feststellt, werden nicht als Ausschuss aussortiert, sondern in der zweiten Stufe der Qualitätsprüfung ebenfalls getestet. In der ersten Stufe dieser Qualitätsprüfung werden bei 5% der getesteten Produkte Mängel festgestellt, in der zweiten Stufe bei 3% der getesteten Produkte. Bei 1% der getesteten Produkte werden sowohl in der ersten als auch in der zweiten Stufe der Qualitätsprüfung Mängel festgestellt. Bei 80% der Produkte, für die in der zweistufigen Qualitätsprüfung ein Mangel festgestellt wird, ist dieser Mangel so schwerwiegend, dass sie nicht verkauft werden können. Der Rest wird überarbeitet und anschließend verkauft. Die Produkte, bei denen in der zweistufigen Qualitätsprüfung keine Mängel festgestellt werden, werden alle verkauft.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einem zufällig ausgewählten Produkt in der zweistufigen Qualitätsprüfung kein Mangel festgestellt?
- b) Sind die Ereignisse „Bei einem zufällig ausgewählten Produkt wird in der ersten Stufe der Qualitätsprüfung ein Mangel festgestellt“ und „Bei einem zufällig ausgewählten Produkt wird in der zweiten Stufe der Qualitätsprüfung ein Mangel festgestellt“ stochastisch unabhängig?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein zufällig ausgewähltes Produkt verkauft werden?
- d) Sie haben ein Produkt gekauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es die zweistufige Qualitätsprüfung ohne Feststellung von Mängeln überstanden?

### Lösung zu Aufgabe 1

- a) Die Variable „monatliches Bruttogehalt eines Beschäftigten“ ist metrisch, falls die Daten nicht klassierten erhoben wurden, oder ordinal, falls die Daten klassiert erhoben wurden. Die Skalierung kann stetig oder diskret sein.

b)

Klasse-Nr	Klasse	$x_j^*$	$n_j$	$n_j/n$	$F$	$\frac{n_j/n}{b_j}$
1	500 bis 1 500	1 000	40	0,20	0,20	0,00020
2	1 500 bis 2 500	2 000	64	0,32	0,52	0,00032
3	2 500 bis 3 500	3 000	80	0,40	0,92	0,00040
4	3 500 bis 4 500	4 000	12	0,06	0,98	0,00006
5	4 500 bis 5 500	5 000	4	0,02	1,00	0,00002
$\Sigma$			200	1		

$$x_{0,25} \approx 1\,500 + \frac{0,25 - 0,2}{0,32} \cdot 1\,000 = 1\,656,25$$

d.h. etwa 25% der Befragten verdienen höchstens 1 656 EUR.

- c)  $F(3\,000) = F(2\,500) + 0,5 \cdot 0,40 = 0,52 + 0,2 = 0,72$

d.h. etwa 28% der Befragten verdienen mehr als 3 000 EUR.

d)  $\bar{x} \approx \frac{1}{200} [1\,000 \cdot 40 + 2\,000 \cdot 64 + 3\,000 \cdot 80 + 4\,000 \cdot 12 + 5\,000 \cdot 4] = 2\,380$

d.h. das durchschnittliche Bruttomonatsgehalt beträgt 2 380 EUR.

$$x_{\text{Modus}} = 3\,000$$

Der Modus bei klassierten Daten ist die Klassenmitte der Klasse mit der größten Dichte. Da hier äquidistante Klassen vorliegen, ist der Modus die Klassenmitte der Klasse mit den meisten Nennungen (hier 80); d.h. die meisten Befragten verdienen um die 3 000 EUR.

e)  $s^2 \approx \frac{1}{200} [(1\,000 - 2\,380)^2 \cdot 40 + (2\,000 - 2\,380)^2 \cdot 64 + (3\,000 - 2\,380)^2 \cdot 80 + (4\,000 - 2\,380)^2 \cdot 12 + (5\,000 - 2\,380)^2 \cdot 4] = 875\,600$

$$s = \sqrt{875\,600} = 935,735$$

d.h. die Schwankungen gemessen mit der Standardabweichung betragen in etwa 936 EUR.

*Lösung zu Aufgabe 2*

a)  $n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,03^2} = 1\,067,1$

d.h. es sind mindestens 1 068 Mobilfunknutzer zu befragen.

b) Faustregel  $n = 1\,278 \geq 30$  erfüllt

$$\bar{x} = \frac{51\,351,44}{1\,287} = 39,9$$

$$s^2 = \frac{1}{1\,287} \cdot 31\,449,98 = 24,43666 \Rightarrow s = \sqrt{24,43666} = 4,9$$

$$0,95 \text{ KI für } \mu = 39,9 \pm 1,96 \cdot \frac{4,9}{\sqrt{1\,287}} = [39,6; 40,2]$$

d.h.  $[39,6; 40,2]$  ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem die mittleren Ausgaben für monatliche Handygebühren mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegen.

c)  $X =$  monatliche Ausgaben (in Euro)

$$X \sim \text{NV}(\mu = 40; \sigma = 5)$$

$$P(X \leq 42) - P(X \leq 30) = F\left(\frac{42 - 40}{5}\right) - F\left(\frac{30 - 40}{5}\right) = F(0,4) - F(-2) = 0,655 - 0,023 = 0,632$$

d.h. der Anteil beträgt etwa 63%.

*Lösung zu Aufgabe 3*

$MS1 =$  Mangel eines Prod.stückes wird in Stufe 1 erkannt

$MS2 =$  Mangel eines Prod.stückes wird in Stufe 2 erkannt

$V =$  Prod.stück wird verkauft

$$0,05 = P(MS1)$$

$$0,03 = P(MS2)$$

$$0,01 = P(MS1 \cap MS2)$$

$$0,80 = P(\bar{V} \mid MS1 \cup MS2) \Rightarrow 0,20 = P(V \mid MS1 \cup MS2)$$

$$1,00 = P(V \mid \overline{MS1} \cap \overline{MS2}) \Rightarrow 0,00 = P(\bar{V} \mid \overline{MS1} \cap \overline{MS2})$$

$$\overline{MS1 \cup MS2} = \overline{MS1} \cap \overline{MS2}$$

Arbeitstabelle:	$MS1$	$\overline{MS1}$	
$MS2$	0,01	0,02	0,03
$\overline{MS2}$	0,04	0,93	0,97
	0,05	0,95	1

Aus diesen Angaben lassen sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten für die Arbeitstabelle mit  $V$  und  $MS1 \cup MS2$  berechnen:

$$P(V \cap (MS1 \cup MS2)) = P(V | (MS1 \cup MS2)) \cdot P(MS1 \cup MS2) = 0,2 \cdot 0,07 = 0,014$$

$$P(V \cap \overline{MS1} \cap \overline{MS2}) = P(V | \overline{MS1} \cap \overline{MS2}) \cdot P(\overline{MS1} \cap \overline{MS2}) = 1,00 \cdot 0,93 = 0,93$$

$$P(\overline{V} \cap \overline{MS1} \cap \overline{MS2}) = P(\overline{V} | \overline{MS1} \cap \overline{MS2}) \cdot P(\overline{MS1} \cap \overline{MS2}) = 0 \cdot 0,93 = 0$$

Arbeitstabelle:	$V$	$\overline{V}$	
$MS1 \cup MS2$	0,014	0,056	0,07
$\overline{MS1} \cap \overline{MS2}$	0,93	0	0,93
	0,944	0,056	1

a)  $P(\overline{MS1} \cap \overline{MS2}) = 0,93$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 93 %.

b)  $P(MS1 \cap MS2) = 0,01 \neq 0,0015 = 0,05 \cdot 0,03 = P(MS1) \cdot P(MS2)$

d.h. die beiden Ereignisse sind stochastisch abhängig.

c)  $P(V) = 0,944$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 94,4%.

d)  $P(\overline{MS1} \cap \overline{MS2} | V) = \frac{0,93}{0,944} = 0,9852$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 98,52%.