

Statistik-Klausur vom 19. April 2006

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

- a) Ein Unternehmen erfasst die Aufträge des abgelaufenen Wirtschaftsjahres nach ihrem Umsatz und erstellt die folgende Statistik:

Klasse Nr.	Umsatz über ... bis maximal ...	Anzahl der Aufträge
1	0 GE - 1 000 GE	20
2	1 000 GE - 2 000 GE	40
3	2 000 GE - 5 000 GE	30
4	5 000 GE - 10 000 GE	10
Summe		100

Berechnen Sie für die statistische Variable „Umsatzhöhe eines Auftrages“ den Median und den Quartilsabstand.

- b) Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit den beiden Ausgängen Erfolg und Misserfolg. Erfahrungsgemäß tritt der Erfolg bei 70 % der Experimente ein. Das Experiment wird zehnmal unabhängig wiederholt.
1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens acht Erfolge beobachtet werden.
 2. Berechnen Sie die Anzahl der erwarteten Erfolge.

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden quartalsmäßigen Absatzmengen eines Produkts für den Zeitraum von 2003 bis 2005:

Jahr	I	II	III	IV
2003	624	608	704	656
2004	656	640	736	688
2005	704	688	784	736

- a) Ermitteln Sie in der nachfolgenden Arbeitstabelle die fehlenden Werte der geglätteten Reihe für die Quartale I/2003 und II/2003 und III/2003.
- b) Berechnen Sie in der nachfolgenden Arbeitstabelle den fehlenden Wert der saisonbereinigten Reihe für das Quartal III/2003.
- c) Wie wird aus den gegebenen Daten eine Prognose für die Absatzmenge im I. Quartal 2006 durchgeführt?

Arbeitstabelle:

Jahr	Quartal	y_t	x_t	s_t	$y_t - s_t$
2003	I	624		-9	633
	II	608		-35	643
	III	704		51	
	IV	656	660	-7	663
2004	I	656	668	-9	665
	II	640	676	-35	675
	III	736	686	51	685
	IV	688	698	-7	695
2005	I	704	710	-9	713
	II	688	722	-35	723
	III	784	-	51	733
	IV	736	-	-7	743

Aufgabe 3

„Chocolat Plaisir“ ist ein kleines Süßwarenunternehmen, dessen Produktpalette lediglich drei Produkte („Chocdoux“, „Chocfin“, „Chocnoir“) umfasst. Die Preise und abgesetzten Mengen der Produkte für die Jahre 2002 und 2004 lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Produkt	Preis je Packung		Abgesetzte Mengen in 1 000 Packungen	
	2002	2004	2002	2004
Chodoux	5	8	76	75
Chocfin	3	5	40	30
Chocnoir	2,50	3,50	200	300

- Berechnen und interpretieren Sie den Preisindex nach Laspeyres dieser Produktpalette für 2004 zur Basis 2002.
- Das größte Konkurrenzprodukt von „Chocnoir“ konnte von 2002 auf 2004 eine Steigerung der abgesetzten Menge um 30 % verzeichnen. Lag die Absatzentwicklung von „Chocnoir“ über oder unter der des Konkurrenten?
- Berechnen Sie zu dieser Produktpalette den Wertindex (Umsatzindex) 2004 zur Basis 2002

und interpretieren Sie das Ergebnis.

- d) Der Umsatz in der Schokoladenbranche insgesamt ist von 2000 bis 2004 um 120 % gestiegen. Von 2000 bis 2002 ist der Umsatz von „Chocolat Plaisir“ um 20 % gestiegen.
1. Verzeichnete „Chocolat Plaisir“ eine stärkere oder eine schwächere Umsatzentwicklung als die gesamte Branche?
 2. Wie hoch war der Umsatz von „Chocolat Plaisir“ im Jahr 2000?

Aufgabe 4

Die Monatsrendite (in %) eines Wertpapiers kann als normalverteilt angesehen werden. Die erwartete Monatsrendite beträgt 3,24 % und die theoretische Standardabweichung beträgt 0,58 %.

- a) Bestimmen Sie (näherungsweise) den zentralen Bereich (das symmetrische Intervall um den Erwartungswert), in dem im kommenden Monat die Rendite mit einer Wahrscheinlichkeit von
1. 0,68 liegt.
 2. 0,95 liegt.
- b) Wie hoch ist die Mindestrendite, die im kommenden Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 mindestens erzielt wird?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden Monat die Rendite über 3 % beträgt?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden Jahr die Monatsrendite in genau vier der zwölf Monate über 3 % liegt? Unterstellen Sie, dass die Monatsrenditen stochastisch unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 5

Ein Hotel in den Schweizer Alpen rechnet in der nächsten Skisaison aufgrund von Erfahrungswerten mit den folgenden Gewinnen in Abhängigkeit der Schneemenge:

Schneemenge	Gewinn
Extrem viel Schnee	800 000 GE
Viel Schnee	500 000 GE
Normale Schneemenge	200 000 GE
Wenig Schnee	-200 000 GE
Kein Schnee	-300 000 GE

Die langfristigen Wettervorhersagen ergeben:

Schneemenge	Wahrscheinlichkeit
Extrem viel Schnee	0,15
Viel Schnee	0,25
Normale Schneemenge	0,40
Wenig Schnee	0,12
Kein Schnee	0,08

Zur Verlustabsicherung schließt das Hotel eine „Schneeversicherung“ ab. Dabei erhält das Hotel 200 000 GE, falls wenig oder kein Schnee fällt. Die „Schneeversicherung“ kostet 35 000 GE. Lohnt es sich für das Hotel, die „Schneeversicherung“ abzuschließen?

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1

a) X = Umsatzhöhe (in GE) eines Auftrags

$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	b_j	n_j/n	$F(x_j^*)$
0 – 1 000	1 000	0,2	0,2
1 000 – 2 000	1 000	0,4	0,6
2 000 – 5 000	3 000	0,3	0,9
5 000 – 10 000	5 000	0,1	1

$$x_{0,5} \approx 1\,000 + \frac{0,5 - 0,2}{0,4} \cdot 1\,000 = 1\,750$$

d.h. der Median beträgt 1 750 GE.

d.h. 50 % aller Umsätze lagen unter 1 750 GE.

$$x_{0,25} \approx 1\,000 + \frac{0,25 - 0,2}{0,4} \cdot 1\,000 = 1\,125$$

$$x_{0,75} \approx 2\,000 + \frac{0,75 - 0,6}{0,3} \cdot 3\,000 = 3\,500$$

$$x_{0,75} - x_{0,25} \approx 3\,500 - 1\,125 = 2\,375$$

d.h. der Quartilsabstand beträgt 2 375 GE.

b) X = Anzahl der Erfolge unter den zehn Wiederholungen des Experiments

$$X \sim B(n = 10; p = 0,7)$$

$$\begin{aligned} 1. \quad P(X \leq 8) &= 1 - P(X > 8) \\ &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} \cdot 0,7^9 \cdot 0,3^1 - \binom{10}{10} \cdot 0,7^{10} \cdot 0,3^0 \\ &= 1 - 0,1211 - 0,0282 \\ &= 0,8507 \end{aligned}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,8507.

$$2. \quad E[X] = np = 10 \cdot 0,7 = 7$$

d.h. die erwartete Anzahl an Erfolgen beträgt sieben.

Lösung zu Aufgabe 2

Arbeitstabelle:

Quartal	y_t	4erØ	x_t	d_t	\bar{d}_t	s_t	$y_t - s_t$	t	$t \cdot (y_t - s_t)$	t^2
I	624	648	—	—	—9	—9	633	1	633	1
II	608		—	—	—35	—35	643	2	1 286	4
III	704		652	52	51	51	653	3	1 959	9
IV	656		660	—4	—7	—7	663	4	2 652	16
I	656	664	668	—12	—9	—9	665	5	3 325	25
II	640	672	676	—36	—35	—35	675	6	4 050	36
III	736	680	686	50	51	51	685	7	4 795	49
IV	688	692	698	—10	—7	—7	695	8	5 560	64
I	704	704	710	—6	—9	—9	713	9	6 417	81
II	688	716	722	—34	—35	—35	723	10	7 230	100
III	784	728	—	—	51	51	733	11	8 063	121
IV	736		—	—	—7	—7	743	12	8 916	144
Σ							8 224	78	54 886	650

a) x_1, x_2 entfallen

$$x_3 = \frac{648 + 656}{2} = 652$$

b) $y_3 - s_3 = 704 - 51 = 653$

c) Das I. Quartal 2006 ist der Zeitpunkt dreizehn.

1. Lösungsweg:

Mit Hilfe der linearen Regression wird die Trendgerade $f(t) = a + b \cdot t$ aus den Zeitpunkten $t = 1, \dots, 12$ und den Werten der saisonbereinigten Reihe $y_1 - s_1, y_2 - s_2, \dots, y_{12} - s_{12}$ berechnet. (Manche Statistiker nehmen statt der saisonbereinigten Reihe auch die geglättete Reihe x_3, x_4, \dots, x_{10} zur Berechnung der Trendgeraden.) Der Prognosewert ergibt sich dann wie folgt:

$$a + b \cdot 13 + s_1$$

2. Lösungsweg:

$$b = \frac{12 \cdot 54\,886 - 78 \cdot 8\,224}{12 \cdot 650 - 78 \cdot 78} = \frac{17\,160}{7\,160} = 10$$

$$a = \frac{8\,224 - 10 \cdot 78}{12} = \frac{7\,444}{12} = 620,3$$

$$620,3 + 13 \cdot 10 + s_1 = 750,3 - 9 = 741,3$$

d.h. der Prognosewert beträgt etwa 741 ME.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $P^{La} = \frac{76 \cdot 8 + 40 \cdot 5 + 200 \cdot 3,5}{76 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 200 \cdot 2,5} = \frac{1\,508}{1\,000} = 1,508$

d.h. im Zeitraum von 2002 bis 2004 ist der Preis für diese Produktpalette um insgesamt 51 % gestiegen.

b) $\frac{\text{Absatz}_{2004}}{\text{Absatz}_{2002}} = \frac{300}{200} = 1,5$

d.h. im Zeitraum von 2002 bis 2004 ist der Absatz des Produkts „Chocnoir“ um insgesamt 50 % gestiegen. Somit lag die Absatzentwicklung von Chocnoir über der des Konkurrenten.

2. Lösungsweg: $Q^{La} = \frac{300 \cdot 2,5}{200 \cdot 2,5} = 1,5$

3. Lösungsweg: $Q^{Pa} = \frac{300 \cdot 3,5}{200 \cdot 3,5} = 1,5$

c) $W = \frac{8 \cdot 75 + 5 \cdot 30 + 3,5 \cdot 300}{5 \cdot 76 + 3 \cdot 40 + 2,5 \cdot 200} = \frac{1\,800}{1\,000} = 1,8$

d.h. im Zeitraum von 2002 bis 2004 ist der Umsatz dieser Produktpalette um insgesamt 80 % gestiegen.

d) 1. Umsatzsteigerung von Chocolat Plaisir im Zeitraum von 2000 bis 2004:

$$1,2 \cdot 1,8 = 2,16$$

d.h. Chocolat Plaisir verzeichnete im Zeitraum von 2000 bis 2004 ein Umsatzplus von insgesamt 116 %.

d.h. Chocolat Plaisir verzeichnete eine schwächere Umsatzentwicklung als die gesamte Branche.

$$2. 1,2 = \frac{\text{Umsatz}_{2002}}{\text{Umsatz}_{2000}} = \frac{1\,000}{\text{Umsatz}_{2000}} = \frac{1\,000}{\text{Umsatz}_{2000}}$$

$$\Rightarrow \text{Umsatz}_{2000} = \frac{1\,000}{1,2} = 833$$

d.h. im Jahr 2000 beträgt der Umsatz von Chocolat Plaisir 833 GE.

Lösung zu Aufgabe 4:

X = monatliche Rendite

$X \sim N(\mu = 3,24; \sigma = 0,58)$

a) 1. $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = 3,24 \pm 0,58 = [2,66; 3,82]$

2. $[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma] = 3,24 \pm 2 \cdot 0,58 = [2,08; 4,40]$

b) $0,10 = P(X \leq x) = F_U \left(\frac{x - 3,24}{0,58} \right) \Rightarrow -1,28 = \frac{x - 3,24}{0,58} \Rightarrow x = 2,50$

d.h. die monatliche Mindestrendite beträgt 2,5 %.

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_U\left(\frac{3 - 3,24}{0,58}\right) = 1 - F_U(-0,4138) = 1 - 0,340 = 0,660$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 66 %.

d) $Y =$ Anzahl der Monate, in denen im nächsten Jahr die Monatsrendite über 3 % liegt

$$Y \sim \mathbf{B}(n = 12; p = 0,66)$$

$$P(Y = 4) = \binom{12}{4} \cdot 0,66^4 \cdot 0,34^8 = 0,0168$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0168.

Lösung zu Aufgabe 5

$X =$ Gewinn (in GE) ohne Schneerversicherung in der nächsten Ski-Saison

$Y =$ Gewinn (in GE) mit Schneerversicherung in der nächsten Ski-Saison

x_i	800 000	500 000	200 000	-200 000	-300 000
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,40	0,12	0,08

$$E[X] = 800\,000 \cdot 0,15 + 500\,000 \cdot 0,25 + 200\,000 \cdot 0,4 - 200\,000 \cdot 0,12 - 300\,000 \cdot 0,08 = 277\,000$$

y_i	765 000	465 000	165 000	-35 000	-135 000
$P(Y = y_i)$	0,15	0,25	0,40	0,12	0,08

$$E[Y] = 765\,000 \cdot 0,15 + 465\,000 \cdot 0,25 + 165\,000 \cdot 0,4 - 35\,000 \cdot 0,12 - 135\,000 \cdot 0,08 = 282\,000$$

d.h. der erwartete Gewinn der nächsten Ski-Saison ist höher, wenn die Versicherung abgeschlossen wird.