

Statistik-Klausur vom 27.09.2010

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

Ein international tätiges Unternehmen mit mehreren Niederlassungen in Deutschland und dem übrigen Europa hat seine überfälligen Forderungen in Millionen Euro (Mio. EUR) untersucht, nach Fälligkeit in Tagen eingeteilt und einander gegenüber gestellt.

Klasse Nr.	Fälligkeit von über ... bis maximal ... (in Tagen)	Höhe überfälliger Forderungen	
		in Deutschland (in Mio. EUR)	im übrigen Europa (in Mio. EUR)
1	0 bis 30	24	12
2	30 bis 90	48	36
3	90 bis 180	72	66
4	180 bis 360	16	6
Summe		160	120

- Wie lange sind 30 Prozent der Forderungen in Deutschland höchstens überfällig?
- Wie viel Prozent der Forderungen im übrigen Europa sind länger als 225 Tage überfällig?
- Ermitteln Sie unter Zugrundelegung des arithmetischen Mittels, ob die Forderungen in Deutschland oder die Forderungen im übrigen Europa durchschnittlich länger überfällig sind.
- In welcher der beiden Regionen schwankt die Fälligkeit der Forderungen stärker? Begründen Sie Ihre Antwort durch Berechnung einer geeigneten statistischen Maßzahl.
- Wie ist die Spannweite definiert? Kann diese bei den vorliegenden klassierten Daten als Parameter verwendet werden? Begründen Sie bitte kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 2

- Bei dreißig Nonstop-Flügen von Hamburg nach New York wurde die reine Flugzeit X (in Stunden) pro Flug gemessen. Es ergaben sich die folgenden Daten:

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	8,84	+0,22	0,0483
2	8,51	-0,11	0,0119
\vdots			
30	8,16	-0,47	0,2187
Σ	258,70	0	8,4413

- Berechnen Sie ein 0,95-Konfidenzintervall für die erwartete Flugzeit auf dieser Strecke.
- Interpretieren Sie das unter a) erhaltene Konfidenzintervall.

- b) Die reine Flugzeit (in Stunden) pro Flug von Hamburg nach New York kann als normalverteilte Zufallsvariable aufgefasst werden mit dem Erwartungswert 8,5 Stunden und der Standardabweichung von 0,5 Stunden.
1. Mit welcher Flugzeit ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens zu rechnen?
 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Flugzeit eines Fluges genau 8,5 Stunden beträgt?
 3. In welchem zentralen Intervall liegen 95% aller Flugzeiten auf dieser Strecke?

Aufgabe 3

Ein Unternehmen möchte eine Bewerberin/einen Bewerber für die Besetzung einer ausgeschriebenen Stelle auswählen. Das Unternehmen führt dazu ein zweistufiges Verfahren durch. In der ersten Stufe werden die Bewerberinnen/Bewerber auf Fachkompetenz und Teamfähigkeit getestet. Die Bewerberinnen/Bewerber, die sowohl Fachkompetenz als auch Teamfähigkeit besitzen, werden in der zweiten Stufe zu einem persönlichen Gespräch eingeladen.

Die erste Stufe des Verfahrens ergibt, dass zwanzig Prozent der getesteten Personen teamfähig sind und dass bei fünfzehn Prozent der getesteten Personen Fachkompetenz vorliegt. Die erste Stufe ergibt ferner, dass fünf Prozent aller getesteten Personen zu einem persönlichen Gespräch eingeladen werden.

- a) Wie viel Prozent der Bewerberinnen/Bewerber sind fachkompetent oder teamfähig?
- b) Sind die Eigenschaften Fachkompetenz und Teamfähigkeit stochastisch unabhängig?
- c) Bei einer Bewerberin/einem Bewerber wird in der ersten Stufe des Verfahrens Teamfähigkeit festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person auch fachkompetent?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine nicht teamfähige Person dennoch fachkompetent?

Lösung zu Aufgabe 1:

X = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung in Höhe von 1 Mio. EUR in Deutschland

Y = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung in Höhe von 1. Mio. EUR im übrigen Europa

n_j^x = Anzahl der Forderungen über eine Mio. EUR in der j -en Klasse in Deutschland

n_j^y = Anzahl der Forderungen über eine Mio. EUR in der j -en Klasse im übrigen Europa

j	$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	x_j'	b_j	n_j^x/n	$F(x_j^*)$	n_j^y/n	$F(y_j^*)$
1	0 – 30	15	30	0,15	0,15	0,10	0,10
2	30 – 90	60	60	0,30	0,45	0,30	0,40
3	90 – 180	135	90	0,45	0,90	0,55	0,95
4	180 – 360	270	180	0,10	1,00	0,05	1,00
Σ				1,00		1,00	

a) $x_{0,30} \approx 30 + \frac{0,30 - 0,15}{0,30} \cdot 60 = 60$

d.h. etwa 30% aller Forderungen in Deutschland sind höchstens 60 Tage überfällig.

b) $F(225) \approx 0,95 + \frac{0,05}{180}(225 - 180) = 0,9625$

$100\% - 96,25\% = 3,75\%$

d.h. etwa 4% aller Forderungen im übrigen Europa sind länger als 225 Tage überfällig.

- c) $\bar{y} \approx \frac{1}{120} [15 \cdot 12 + 60 \cdot 36 + 135 \cdot 66 + 270 \cdot 6] = 107,25$
d.h. im übrigen Europa ist eine Forderung in Höhe von einer Mio. EUR im Durchschnitt etwa 107 Tage überfällig.
- $\bar{x} \approx \frac{1}{160} [15 \cdot 24 + 60 \cdot 48 + 135 \cdot 72 + 270 \cdot 16] = 108$
d.h. in Deutschland ist eine Forderung in Höhe von einer Mio. EUR im Durchschnitt 108 Tage überfällig und damit etwas länger überfällig als im übrigen Europa.
- d) $s_x^2 \approx \frac{1}{160} [(15 - 108)^2 \cdot 24 + (60 - 108)^2 \cdot 48 + (135 - 108)^2 \cdot 72 + (270 - 108)^2 \cdot 16]$
 $= 4941$
- $s_y^2 \approx \frac{1}{120} [(15 - 107,25)^2 \cdot 12 + (60 - 107,25)^2 \cdot 36 + (135 - 107,25)^2 \cdot 66 + (270 - 107,25)^2 \cdot 6]$
 $= 3268,688$
- d.h. gemessen mit der Varianz sind die Unterschiede der Fälligkeitsdauern der Forderungen in Deutschland stärker.
- e) Die Spannweite ist die Differenz aus dem größten beobachteten Wert und dem kleinsten beobachteten Wert. Da bei klassierten Daten (wie hier im Beispiel) nicht mehr die Einzelwerte vorliegen, sondern nur noch die Klassen, in die die Einzelwerte fallen, können hier weder ein größter noch ein kleinster beobachteter Wert bestimmt werden und somit kann die Spannweite nicht berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 2:

- a) 1. $\bar{x} = \frac{258,70}{30} = 8,62$
 $s_x^2 = \frac{8,4413}{30} = 0,2814$ und $s_x = \sqrt{0,2814} = 0,53$
Faustregel $n \geq 30$ erfüllt
 $\bar{x} \pm 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 8,62 \pm 1,96 \cdot \frac{0,53}{\sqrt{30}} = 8,62 \pm 0,19 = [8,43; 8,81] = [8\text{h}26\text{Min}; 8\text{h}49\text{Min}]$
2. Das Intervall $[8\text{h}26\text{Min}; 8\text{h}49\text{Min}]$ ist ein geschätzter Bereich für das Intervall, in dem die erwartete Flugzeit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.
- b) $X = \text{Flugzeit (in h)} \sim \text{NV}(\mu = 8,5; \sigma = 0,5)$
1. $0,05 = P(X \leq x) \Leftrightarrow -1,6449 = \frac{x - 8,5}{0,5} \Leftrightarrow x = 7,67755$
 $0,67755 \cdot 60 = 40,7 \text{ Minuten} \approx 41 \text{ Minuten}$
d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von 95% ist mindestens mit einer Flugzeit von 7 Stunden und 41 Minuten zu rechnen.
2. $P(X = 8,5) = 0$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.

3. Zweifaches zentrales Schwankungsintervall $\mu \pm 2 \cdot \sigma$

$$8,5 \pm 2 \cdot 0,5 = [7,5; 9,5]$$

d.h. 95% aller Flugzeiten liegen zwischen $7\frac{1}{2}$ Stunden und $9\frac{1}{2}$ Stunden.

2. Lösungsweg:

$$0,95 = P(X \leq \mu + c) - P(X \leq \mu - c)$$

$$0,975 = P(X \leq \mu + c) = F_U\left(\frac{\mu + c - \mu}{\sigma}\right) = F_U\left(\frac{c}{\sigma}\right)$$

$$1,96 = \frac{c}{\sigma} \Leftrightarrow c = 1,96 \cdot \sigma = 1,96 \cdot 0,5$$

$$8,5 \pm 1,96 \cdot 0,5 = [7,52; 9,48]$$

d.h. 95% aller Flugzeiten liegen zwischen $7\frac{1}{2}$ Stunden und $9\frac{1}{2}$ Stunden.

Lösung zu Aufgabe 3:

F = zufällig ausgewählte(r) Bewerberin/Bewerber ist fachkompetent

T = zufällig ausgewählte(r) Bewerberin/Bewerber ist teamfähig

Arbeitstabelle:

	T	\bar{T}	
F	0,05	0,10	0,15
\bar{F}	0,15	0,70	0,85
	0,20	0,80	1

a) 1. Lösungsweg:

$$P(T \cup F) = 1 - 0,70 = 0,30$$

d.h. 30% der Bewerberinnen/Bewerber sind entweder nur teamfähig oder nur fachkompetent oder beides.

2. Lösungsweg:

Das umgangssprachliche Oder ist ein ausschließendes Oder. Insofern kann hier auch der Anteil der Bewerberinnen/Bewerber berechnet werden, die nur eine der beiden Eigenschaften teamfähig und fachkompetent aufweisen:

$$P(T \cap \bar{F}) + P(\bar{T} \cap F) = 0,15 + 0,10 = 0,25$$

d.h. 25% der Bewerberinnen und Bewerber sind entweder nur teamfähig oder nur fachkompetent.

b) $P(F) \cdot P(T) = 0,15 \cdot 0,20 = 0,03 \neq 0,05 = P(F \cap T)$

d.h. F, T sind stochastisch abhängig.

c) $P(F | T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0,05}{0,20} = 0,25$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,25.

d) $P(F | \bar{T}) = \frac{P(F \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,125.

2. Lösungsweg für Aufgabe 1a) bis 1d):

X = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung in Deutschland

Y = Fälligkeit (in Tagen) einer Forderung im übrigen Europa

n_j^x = Anzahl der Forderungen in Deutschland (hier: unbekannt)

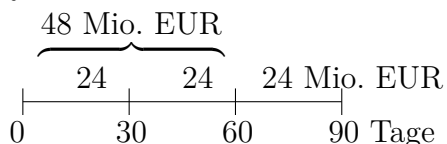
n_j^y = Anzahl der Forderungen im übrigen Europa (hier: unbekannt)

n_j^x/n = Anteil (in %) der Forderungen in der j -en Klasse in Deutschland

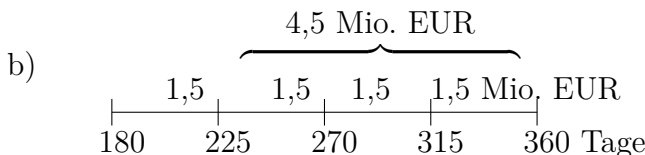
n_j^y/n = Anteil (in %) der Forderungen in der j -en Klasse im übrigen Europa

j	$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	x_j'	Höhe in D	n_j^x/n	Höhe in Rest EU	n_j^y/n
1	0 – 30	15	24	0,15	12	0,10
2	30 – 90	60	48	0,30	36	0,30
3	90 – 180	135	72	0,45	66	0,55
4	180 – 360	270	16	0,10	6	0,05
Σ			160	1,00	120	1,00

a) 30% von 160 Mio. EUR = 48 Mio. EUR



d.h. in Deutschland sind Forderungen in Höhe von 48 Mio. EUR höchstens 60 Tage überfällig.



$$\frac{4,5 \text{ Mio. EUR}}{120 \text{ Mio. EUR}} = 0,0375 = 3,75\%$$

c) Arithmetisches Mittel:

$$15 \text{ Tage} \cdot 0,15 + 60 \text{ Tage} \cdot 0,30 + 135 \text{ Tage} \cdot 0,45 + 270 \text{ Tage} \cdot 0,10 = 108 \text{ Tage}$$

d.h. das mit der Höhe der Forderungen gewogene arithmetisches Mittel in Deutschland beträgt 108 Tage.

$$15 \text{ Tage} \cdot 0,10 + 60 \text{ Tage} \cdot 0,30 + 135 \text{ Tage} \cdot 0,55 + 270 \text{ Tage} \cdot 0,05 = 107,25 \text{ Tage}$$

d.h. das mit der Höhe der Forderungen arithmetische Mittel im übrigen Europa beträgt 107,25 Tage und ist damit etwas kürzer als das arithmetische Mittel in Deutschland.

d) Varianz:

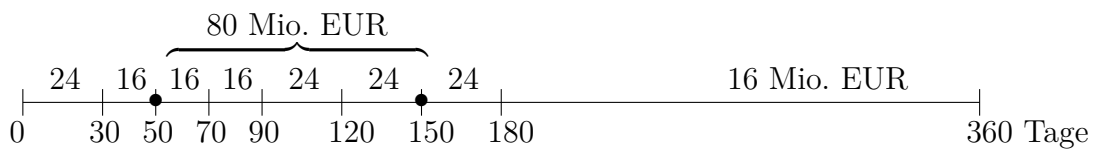
$$(15 - 108)^2 \cdot 0,15 + (60 - 108)^2 \cdot 0,30 + (135 - 108)^2 \cdot 0,45 + (270 - 108)^2 \cdot 0,10 = 4941$$

$$(15 - 107,25)^2 \cdot 0,10 + (60 - 107,25)^2 \cdot 0,30 + (135 - 107,25)^2 \cdot 0,55 + (270 - 107,25)^2 \cdot 0,05 = 3268,7$$

d.h. gemessen mit der Varianz sind die Unterschiede der Fälligkeitsdauern der Forderungen in Deutschland stärker.

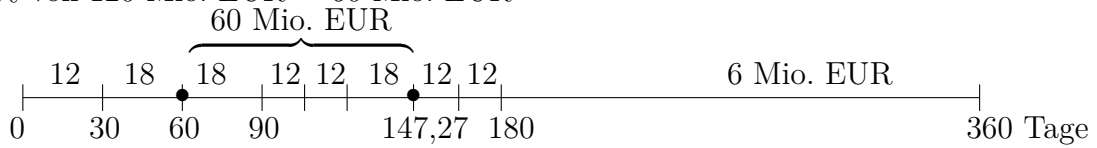
Oder die mittleren 50% ausrechnen:

$$50\% \text{ von } 160 \text{ Mio. EUR} = 80 \text{ Mio. EUR}$$



d.h. in Deutschland fallen 50% aller Forderungen in den mittleren Bereich 50 Tage bis 150 Tage.

50% von 120 Mio. EUR = 60 Mio. EUR



d.h. im übrigen Europa fallen 50% aller Forderungen in den mittleren Bereich 60 Tage bis 147 Tage. Damit ist dieser mittlere Bereich etwas kürzer als der von Deutschland.