Statistik-Klausur vom 28. Januar 2008

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

a) Ein Unternehmen erstellt folgende Statistik über die Aufträge der Wirtschaftsjahre 2006 und 2007:

Umsatz in Geldeinheiten über … bis …		Anzahl der Aufträge im Wirtschaftsjahr 2006	2007
0	2 000	48	30
2 000	4 500	120	60
4 500	8 000	48	60
8 000	12 000	24	50
Summe		240	200

1. In welchem der beiden Wirtschaftsjahre ist der durchschnittliche Umsatz pro Auftrag höher? Beantworten Sie diese Fragestellung durch Berechnung eines geeigneten Lagemaßes.
2. In welchem der beiden Wirtschaftsjahre ist der Umsatz, der bei 75% der Aufträge überschritten wird, höher?

b) Gemäß Selbstauskunft haben von den Bewerberinnen und Bewerbern auf eine Stellenausschreibung für eine betriebswirtschaftliche Tätigkeit 12% sehr gute Jura-Kenntnisse. Etwa 7% geben an, sehr gute Statistik-Kenntnisse zu besitzen. Sehr gute Kenntnisse in beiden Bereichen - Jura und Statistik - haben nach einer Selbstauskunft 2% aller Bewerberinnen und Bewerber.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine zufällig ausgewählte Bewerberin bzw. ein zufällig ausgewählter Bewerber

1. mindestens in einem der beiden Bereiche Jura/Statistik sehr gute Kenntnisse?
2. mit sehr guten Jura-Kenntnissen auch sehr gute Statistik-Kenntnisse?
3. weder sehr gute Jura- noch sehr gute Statistik-Kenntnisse?

Aufgabe 2

Ein Schraubenhersteller möchte den Zusammenhang zwischen den Ausgaben für Qualitätssicherung und der Anzahl defekter Produkte untersuchen. Dafür hat er für die letzten sechs Jahre die Ausgaben für Qualitätssicherung (in TSD. €) und die Anzahl defkter Schrauben (in 1 000 Stück) erfasst:

Jahr	Ausgaben für Qualitätssicherung in Tsd. €	Anzahl defekter Stücke in Tausend
2001	9	18
2002	12	11
2003	12	8
2004	14	12
2005	20	5
2006	14	9

a) Berechnen Sie eine geeignete statistische Kennzahl zur Messung des linearen Zusammenhangs zwischen den Ausgaben für Qualitätssicherung und der Anzahl defekter Stücke und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Im Jahr 2007 ist der Schraubenhersteller gezwungen, Kosten zu sparen. Daher möchte er im Jahr 2007 seine Ausgaben für Qualitätssicherung auf 13 000 € begrenzen. Mit welcher Anzahl defekter Schrauben ist dann zu rechnen?

c) Der Schraubenhersteller möchte die Anzahl der defekten Schrauben auf 4 000 Stück pro Jahr begrenzen. Wie hoch müssten dann die jährlichen Ausgaben für die Qualitätssicherung sein?

d) Für wie verlässlich halten Sie Ihre Ergebnisse aus b) und c)? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ausgaben (in GE) für eine Betriebsweihnachtsfeier eines mittelständischen Betriebes angegeben:

Jahr	Ausgaben	
	in Preisen von 2003	in jeweiligen Preisen
2003	2 430	2 430
2004	2 505	2 585
2005	2 580	2 720
2006	2 685	2 915
2007	2 760	3 145

a) Um wie viel Prozent sind die jährlichen Ausgaben im Zeitraum von 2003 bis 2007 durchschnittlich pro Jahr nominal gestiegen?

b) Um wie viel Prozent sind die jährlichen Ausgaben im Zeitraum von 2003 bis 2007 durchschnittlich pro Jahr real gestiegen?

c) Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Inflationsrate?

Aufgabe 4

Nehmen Sie an, das jährliche Bruttonationaleinkommen (BNE) gemessen in GE eines Landes im kommenden Jahr sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 10\,000$ GE und $\sigma = 2000$ GE.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden Jahr

   1. das BNE über 11 000 GE liegt?
   2. genau 11 000 GE beträgt.
   3. zwischen 9 000 und 12 000 GE liegt?

b) Mit welchem BNE kann im kommenden Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens gerechnet werden?

Aufgabe 5
Die Stiftung Warentest prüft seit dem Jahr 2002 die Qualität von Schnäppchen bei Discountern. Dabei wurden die getesteten Produkte in den Kategorien „Schnäppchen", „Mittelmaß" und „Fehleinkauf" eingeteilt. Aufgrund dieser Untersuchungen wurden im Herbst 2007 die folgenden Ergebnisse für den Zeitraum 2002 bis 2007 veröffentlicht:

Discounter	Schnäppchen (in Prozent der getesteten Produkte)	Mittelmaß (in Prozent der getesteten Produkte)	Fehlkäufe in (in Prozent der getesteten Produkte)
Aldi	42%	40%	18%
Lidl	26%	48%	26%
Plus	19%	37%	44%
Penny	30%	40%	30%
Real	12%	42%	46%
Norma	0%	35%	65%
Tchibo	24%	38%	38%

Bei einer Schnäppchenjagd tätigt Einkäufer Müller 25% seiner Einkäufe bei Aldi, 30% der Einkäufe bei Lidl und 45% seiner Einkäufe bei Plus. Einkäufer Meier verteilt seine Einkäufe bei einer Schnäppchenjagd wie folgt: 45% bei Penny und 55% bei Norma. Dabei beziehen sich die Prozentzahlen auf die Anzahl der gekauften Produkte.

a) Einkäufer Müller betrachtet ein zufällig ausgewähltes von ihm gekauftes Produkt und fragt sich, mit welcher Wahscheinlichkeit es sich um ein Schnäppchen handelt. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit und vergleichen Sie diese mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit bei Einkäufer Meier. Wer hat die höhere Wahrscheinlichkeit für ein Schnäppchen?

b) Gehen Sie davon aus, dass die beiden Einkäufer beim Kauf eines Schnäppchens jeweils 20 GE sparen. Wenn sie einen Fehlkauf tätigen, wird der damit verbundene Verlust auf 50 GE geschätzt. Handelt es sich um ein mittelmäßiges Produkt, so ist mit dem Kauf weder eine Erspanis noch ein vVerlust verbunden. Welche der beiden Einkäufer hat im Durchschnitt bezogen auf ein Produkt die bessere Strategie? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer geeigneten Berechnung.

Lösung zu Aufgabe 1

a) X=Umsatz eines Auftrags im WJ 2006
   Y=Umsatz eines Auftrags im WJ 2007

1. $\overline{x} = \frac{1}{240}[1000 \cdot 48 + 3250 \cdot 120 + 6250 \cdot 48 + 10\,000 \cdot 24] = 4075$

   $\overline{y} = \frac{1}{200}[1000 \cdot 30 + 3250 \cdot 60 + 6250 \cdot 60 + 10\,000 \cdot 50] = 5500$

   d.h. 2007 gab es im Durchschnitt mehr Aufträge.

2.

Klasse		absolute Häufigkeiten		kumulierte absolute H.	
		2006	2007	2006	2007
0	2 000	48	30	48	30
2 000	4 500	120	60	168	90
4 500	8 000	48	60	216	150
8 000	12 000	24	50	240	200

   $$x_{0,25} = 2000 + \frac{0{,}25 - 48/240}{120/240} \cdot 2500 = 2250$$

   $$y_{0,25} = 2000 + \frac{0{,}25 - 30/200}{60/200} \cdot 2500 = 2833{,}\overline{3}$$

   d.h. im Jahr 2007 ist dieser Umsatz höher.

b) J=zufällig Ausgewählter besitzt sehr gute Jura-Kenntnisse
   S=zufällig Ausgewählter besitzt sehr gute Statistik-Kenntnisse

$0{,}12 = P(J)$
$0{,}07 = P(S)$
$0{,}02 = P(J \cap S)$

Arbeitstabelle

	J	$\overline{J}$	
S	0,02	0,05	0,07
$\overline{S}$	0,10	0,83	0,93
	0,12	0,88	1

1. $P(J \cup S) = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$
   d.h. der Anteil beträgt 17%.

2. $P(S \mid J) = \frac{P(J \cap S)}{P(J)} = \frac{0{,}02}{0{,}12} = 0{,}1\overline{6} \approx 0{,}17$
   d.h. der Anteil beträgt 17%.

3. $P(\overline{J} \cap \overline{S}) = 0{,}83$
   d.h. der Anteil beträgt 0,83.

Lösung zu Aufgabe 2

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
9	18	162	81	324
12	11	132	144	121
12	8	96	144	64
14	12	168	196	144
20	5	100	400	25
14	9	126	196	81
81	63	784	1161	759

a) $b_1 = \dfrac{6 \cdot 784 - 81 \cdot 63}{6 \cdot 1161 - 81^2} = \dfrac{-399}{405} = -0{,}9851852$

$b_2 = \dfrac{-399}{6 \cdot 759 - 63^2} = \dfrac{-399}{585} = -0{,}6820513$

$r = -\sqrt{b_1 \cdot b_2} = -\sqrt{0{,}6719468} = -0{,}8197236$

d.h. es liegt ein starker negativer linearer Zusammenhang vor

d.h. je höher die Ausgaben für Qualitätssicherung desto niedriger die Anzahl defekter Stücke.

b) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 13 =?$

$a_1 = \dfrac{1}{6} \cdot (63 + 0{,}9851852 \cdot 81) = 23{,}8$

$23{,}8 - 0{,}9851852 \cdot 13 = 10{,}99259$

d.h. es ist mit etwa 11 000 defekter Produktionsstücke zu rechnen.

c) Gesucht: $a_2 + b_2 \cdot 4 =?$

$a_2 = \dfrac{1}{6} \cdot (81 + 0{,}6820513 \cdot 63) = 20{,}6615385$

$20{,}6615385 - 0{,}6820513 \cdot 4 = 17{,}93333$

d.h. die Ausgaben sind mit etwa 18 000 € anzusetzen.

d) Die Berechnung unter b) ist verlässlich, da die Korrelation stark ist und da es sich um eine Interpolation handelt.
Die Berechnung unter c) ist nicht verlässlich. Die Korrelation ist zwar stark, aber handelt sich um eine Extrapolation.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $W = \sqrt[2007-2003]{\dfrac{3\,145}{2\,430}} = \sqrt[4]{1{,}294239} = 1{,}066605$

d.h. das durchschnittliche jährliche nominale Wachstum betrug 6,7%.

a) $Q^{La} = \sqrt[2007-2003]{\dfrac{2\,760}{2\,430}} = \sqrt[4]{1{,}135802} = 1{,}032347$

d.h. das durchschnittliche jährliche reale Wachstum betrug 3,2%.

c) *1. Lösungsweg:*

$P^{Pa} = \dfrac{W}{Q^{la}} = \dfrac{1{,}066605}{1{,}032347} = 1{,}033185$

d.h. die durchschnittliche jährliche Inflationsrate betrug 3,3%.

2. Lösungsweg:

$$P^{Pa} = \sqrt[2007-2003]{\frac{3\,145}{2\,760}} = \sqrt[4]{1{,}139493} = 1{,}033185$$

Lösung zu Aufgabe 4

X = BNE (in GE)

$X \sim \mathsf{NV}(\mu = 10\,000; \sigma = 2\,000)$

a) 1. $P(X > 11\,000) = 1 - F\left(\frac{11\,000 - 10\,000}{2\,000}\right) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}691 = 0{,}309$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 31%.

2. $P(X = 11\,000) = 0$

d.h. im Normalverteilungsmodell haben Punktwahrscheinlichkeiten immer den Wert null.

3. $$\begin{aligned} P(X \leq 12\,000) - P(X \leq 9\,000) &= F\left(\frac{12\,000 - 10\,000}{2\,000}\right) - F\left(\frac{9\,000 - 10\,000}{2\,000}\right) \\ &= F(1) - F(-0{,}5) \\ &= 0{,}841 - 0{,}309 \\ &= 0{,}532 \end{aligned}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit liegt etwas über 50%.

b) $0{,}10 = P(X \leq x) \Rightarrow -1{,}2816 = \frac{x - 10\,000}{2\,000} \Rightarrow x = 7\,436{,}9$

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% kann mindestens mit ca. 7 400 GE gerechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Arbeitstabelle Müller:

	Aldi	Lidl	Plus	
S	0,1050	0,0780	0,0855	0,2685
$\overline{S}$				
	0,25	0,3	0,45	1

$P(S \cap Aldi) = P(S \mid Aldi) \cdot P(Aldi) = 0{,}42 \cdot 0{,}25 = 0{,}105$

$P(S \cap Lidl) = P(S \mid Lidl) \cdot P(Lidl) = 0{,}26 \cdot 0{,}3 = 0{,}078$

$P(S \cap Plus) = P(S \mid Plus) \cdot P(Plus) = 0{,}19 \cdot 0{,}45 = 0{,}0855$

d.h. $P(S) = 0{,}2685$

Arbeitstabelle Meier:

	Penny	Norma	
S	0,1350	0	0,1350
$\overline{S}$			
	0,45	0,55	1

$P(S \cap Penny) = P(S \mid Penny) \cdot P(Penny) = 0{,}3 \cdot 0{,}45 = 0{,}135$

$P(S \cap Norma) = P(S \mid Norma) \cdot P(Norma) = 0 \cdot 0{,}55 = 0$

d.h. $P(S) = 0{,}135$

Bei Einkäufer Müller ist die Wkt für ein Schnäppchen höher.

b) X=Ersparnis Müller beim Kauf eines Produkts
Y=Ersparnis Meier beim Kauf eines Produkts

	S	M	F
x	$+20$	0	-50
$P(X = x)$	0,2685	egal	0,321
$P(Y = x)$	0,135	egal	0,4925

Müller: $P(F) = 0{,}18 \cdot 0{,}25 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}44 \cdot 0{,}45 = 0{,}321$
Meier: $P(F) = 0{,}3 \cdot 0{,}45 + 0{,}65 \cdot 0{,}55 = 0{,}4925$

$E[X] = 20 \cdot 0{,}2685 + 0 - 50 \cdot 0{,}321 = -10{,}68$
$E[Y] = 20 \cdot 0{,}135 + 0 - 50 \cdot 0{,}4925 = -21{,}925$
d.h. der Verlust ist bei Einkäufer Müller geringer.